

RÉPULSION DE ZÉROS DE YANG-LEE ALÉATOIRES

Mathys BRUGIER, Tony HAJJAR, Théotime NIAULT, Simon OBJOIS, Adam ROZENTALIS
L3 Magistère de Mathématiques d'Orsay

Encadrant : Matteo D'ACHILLE

MAG355 Projet TER (Travail Encadré de Recherche)

2 juillet 2024

Résumé

L' α -déterminant est une généralisation de la notion de permanent et de déterminant. Il a des propriétés bien moins sympathiques que ses congénères que nous présentons brièvement et que nous exploiterons pour diverses applications. Un premier axe se concentre sur le calcul numérique de l' α -déterminant par des formules directes déterministes qui s'avèrent limitées en terme de complexité temporelle et de précision. Un deuxième axe se concentre sur la manière dont sont déplacés les zéros de Yang-Lee de la matrice J_n lorsqu'elle est perturbée à diverses positions par un $\epsilon \in \mathbb{R}$. Nous établissons d'abord des résultats analytiques. Ils nous serviront ensuite à déduire les résultats probabilistes lorsque ϵ est une variable aléatoire en cherchant notamment à exprimer la probabilité que les Zéros de Yang-Lee aléatoires restent réels. Des illustrations et expériences numériques sont proposées.

Mots-clés: α -déterminant, α -permanent, zéros de Yang-Lee, perturbations aléatoires, théorème de décomposition de Crane, expansion de Vere-Jones, nombre de stirling, nombre de Bell,



Table des matières

1	Introduction	3
2	Premières propriétés, décomposition de Crane et une application du α-determinant	4
2.1	Premières propriétés de l' α permanent	4
2.2	Une première application du α -permanent	6
2.3	Le théorème de décomposition de Crane pour l' α déterminant	8
3	Expériences numériques	10
3.1	Algorithmes déterministes : naif et Bell	10
3.2	Expérience sur les Zéros de Yang-Lee Aléatoires	16
4	Résultats analytiques	17
4.1	Une unique perturbation	17
4.2	Perturbation double	17
4.3	La perturbation diagonale εI_n	19
5	Zéros de Yang-Lee aléatoires	20
5.1	Trois résultats généraux	20
5.2	Quelques applications	22
6	Conclusions et perspectives	23
A	Résultats utiles sur $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}$, positions perturbées et les dérangements D_n	24
	Acronymes	28

1 Introduction

Les notions d' α -permanent et d' α -determinant furent introduites par D.Vere-Jones [VJ88] dans le cadre de ses travaux en théorie des probabilités. Ces notions ont des liens en physique, notamment en théorie quantique des champs et en physique statistique ([CMO19]).

Définition 1.1 (α -DETERMINANT). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. On définit l' α -determinant d'une matrice M par :*

$$\det_\alpha(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)}$$

où $\nu(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ et \mathfrak{S}_n est le groupe symétrique d'ordre n .

Définition 1.2 (α -PERMANENT). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. On définit l' α -permanent d'une matrice M par*

$$\text{perm}_\alpha(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)}$$

Remarque 1.3 (LIEN ENTRE L' α -PERMANENT ET L' α -DÉTERMINANT). Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On constate immédiatement que : $\det_\alpha(M) = \alpha^n \times \text{perm}_{\frac{1}{\alpha}}(M)$. En effet, $\det_\alpha(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^n \times \alpha^{-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} = \alpha^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\frac{1}{\alpha})^{\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} = \alpha^n \times \text{perm}_{\frac{1}{\alpha}}(M)$.

Remarque 1.4 (RÉDUCTION AU DÉTERMINANT ET PERMANENT USUELS). Pour $\alpha = 1$, $\det_\alpha(M)$ revient au permanent usuel de M : $\det_1(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} = \text{perm}(M)$. Pour $\alpha = -1$, $\det_\alpha(M)$ revient au déterminant usuel de M : $\det_{-1}(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} = \det(M)$, où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ . En effet, il suffit de constater que si une permutation σ se décompose en p cycles à supports disjoints de longueurs respectives k_1, \dots, k_p alors son nombre de cycles est $\nu(\sigma) = p$ et sa signature s'écrit $\epsilon(\sigma) = \prod_{k=1}^p (-1)^{k_i-1}$ car ϵ est un morphisme et que la signature d'un cycle de longueur k_i est $(-1)^{k_i-1}$. On obtient finalement le résultat souhaité puisque $\sum_{i=1}^p k_i = n$.

Remarque 1.5 (n -HOMOGENEITÉ DU α -DETERMINANT ET DU α -PERMANENT). Pour tout $c \in \mathbb{C}$, $\det_\alpha(cM) = c^n \times \det_\alpha(M)$. On a de même, d'après la Remark 1.3 que pour tout $c \in \mathbb{C}$, $\text{perm}_\alpha(cM) = c^n \times \text{perm}_\alpha(M)$.

L'objet centrale de ce TER est donné par la définition suivante, inspirée de la physique théorique [LY52].

Définition 1.6 (ZÉROS DE YANG-LEE). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. On appelle alors **zéros de Yang-Lee** de M les racines de $\det_\alpha(M)$, qui est vu comme un polynôme en la variable α . On note cet ensemble $\text{YL}(M)$.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[n] = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n ainsi que I_n la matrice identité de taille n . On a alors que $\text{YL}(I_n) = \emptyset$. On a aussi le lemme suivant.

Lemme 1.7. *On note J_n la matrice de taille n qui ne contient que des 1, on a alors que $\det_\alpha(J_n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + k\alpha)$. On a donc en particulier $\text{YL}(J_n) = \{\frac{-1}{k}, k \in [n-1]\}$.*

Démonstration. En réorganisant les termes de $\det_\alpha(J_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)}$, on obtient : $\det_\alpha(J_n) = \sum_{k=0}^n s(n, k) \alpha^{n-k}$ où $s(n, k)$ appelé nombre de Stirling de première espèce non signé représente le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n qui contiennent exactement k -cycles¹. D'après la fonction génératrice $\sum_{k=0}^n s(n, k) \alpha^{-k} = (\frac{1}{\alpha})^n$, où $(X)^n = \prod_{k=0}^{n-1} (X+k)$ est la factorielle croissante de $X = \frac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat annoncé (en multipliant par α^n). \square

2 Premières propriétés, décomposition de Crane et une application du α -determinant

Dans cette partie nous donnons quelques résultats concernant le α -permanent d'une matrice complexe quelconque qui nous permettrons de simplifier les divers calculs de α -déterminants. Nous donnons également un premier résultat lié au α -déterminant donnant un exemple d'utilisation de cet objet mathématique mais qui ne sera pas utile pour la suite de notre projet.

2.1 Premières propriétés de l' α permanent

Nous donnons ici quelques propriétés du α -permanent d'une matrice quelconque. Notons pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa transposée tA .

Proposition 2.1 (INVARIANCE PAR TRANSPOSITION). *Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors on a $\text{perm}_\alpha(M) = \text{perm}_\alpha({}^tM)$.*

Démonstration. Considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. D'après le Lemme A.1 on a $\prod_{i=1}^n M_{i, \sigma(i)} = \prod_{i=1}^n M_{\sigma^{-1}(i), i} = \prod_{i=1}^n {}^tM_{i, \sigma^{-1}(i)}$ et $\prod_{i=1}^n M_{i, \sigma^{-1}(i)} = \prod_{i=1}^n M_{\sigma(i), i} = \prod_{i=1}^n {}^tM_{i, \sigma(i)}$. Ces deux égalités nous assurent que devant le coefficient $\alpha^{\nu(\sigma)}$ du α -permanent de M on a les mêmes quantités que pour le α -permanent de tM , d'où le résultat. \square

Dans ce qui suit, nous allons donner une autre façon de considérer le α -permanent d'une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Considérons la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $M \mapsto \text{perm}_\alpha(M)$. Alors cette fonction s'identifie à une unique fonction \tilde{f} définie par l'action suivante sur la matrice M

$$\text{écrite ligne par ligne } \tilde{f} : (\mathbb{C}^n)^n \rightarrow \mathbb{C}, (L_1, L_2, \dots, L_n) \mapsto \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

On remarque également que l'on peut faire la même chose en écrivant notre matrice M par colonne. On en déduit que la fonction \tilde{f} est n -linéaire, à savoir :

Définition 2.2 (n -LINÉARITÉ). *Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit d'une fonction f définie de E^n vers F qu'elle est n -linéaire si elle est linéaire en chaque variable.*

On a :

1. Voir e.g. <https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html>.

Proposition 2.3 (*n*-LINÉARITÉ DE \tilde{f}). *La fonction \tilde{f} est n-linéaire.*

En particulier si on écrit $A = (x_{i,j} + y_{i,j}) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ X_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ alors en notant $X = (x_{i,j}) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et

$Y = (y_{i,j}) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ on a pour tout $i \in [n]$:

$$\text{perm}_\alpha(A) = \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ X_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ Y_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} .$$

Démonstration. Soit $i \in [n]$. On peut partitionner \mathfrak{S}_n comme suit : $\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{j=1}^n \underbrace{\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(i) = j\}}_{=\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}}$

où $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}$ est l'ensemble des permutations qui envoient i sur j .

On peut donc écrire : $\text{perm}_\alpha(A) = \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} \alpha^{\nu(\sigma)} (x_{i,j} + y_{i,j}) \prod_{k \neq i} A_{k,\sigma(k)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{perm}_\alpha(A) &= \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} \alpha^{\nu(\sigma)} x_{i,j} \prod_{k \neq i} A_{k,\sigma(k)}}_{=\text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ X_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} \alpha^{\nu(\sigma)} y_{i,j} \prod_{k \neq i} A_{k,\sigma(k)}}_{=\text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ Y_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On remarque, soit en définissant une seconde fonction qui agit sur les colonnes et en reprenant les mêmes arguments que dans le Proposition 2.3, soit en utilisant l'invariance par transposition (Proposition 2.1), que le α -permanent est également n -linéaire par rapport aux colonnes. En utilisant la Remark 1.3, le résultat suivant dans D.Vere-Jones [VJ88, Proposition 3.1] suit :

Proposition 2.4. *L' α -déterminant est invariant par permutation simultanée de deux lignes et de deux colonnes.*

2.2 Une première application du α -permanent

Il existe de nombreuses identités qui sont des généralisations du théorème principal de MacMahon [Mac15] faisant apparaître l' α -déterminant ou le α -permanent, voir par exemple [Tui18]. Le but de cette section est de proposer une preuve détaillée d'un théorème de D.Vere-Jones [VJ88] concernant le α -permanent.

Théorème 2.5 (EXPANSION DE VERE-JONES). *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ deux matrices telles que le rayon spectral de leur produit ZA est strictement inférieur à 1. On a*

$$[\det(I_n - ZA)]^{-\alpha} = 1 + \sum_{1 \leq i \leq n} z_i \cdot a_{i,i} + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq i,j \leq n} z_i z_j \cdot \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} + \dots$$

Commençons par énoncer un lemme préliminaire qui nous permettra de démontrer le Théorème 2.5.

Lemme 2.6. *Soit h la somme d'une série entière définie sur son disque ouvert de convergence $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ par*

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{z^k}{k!}.$$

Il existe un disque ouvert $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, centré en 0 et de rayon non nul, tel que pour tout $z \in \mathcal{D}'$:

$$\exp[h(z)] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \prod_{r=1}^{m(\tau)} h_{s_r}, \quad (2.1)$$

où $\mathcal{P}_{[k]}$ est l'ensemble des partitions de $[k]$, $\tau = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{m(\tau)}\} \in \mathcal{P}_{[k]}$ est une partition de parties $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{m(\tau)}$, $m(\tau)$ dénote le nombre d'éléments de τ et, pour $r \in [m(\tau)]$, s_r est le cardinal de la partie \mathcal{S}_r .

Démonstration du Lemme 2.6. Dans cette preuve nous allons montrer que les deux termes de l'égalité 2.1 sont solutions d'un même problème de Cauchy. L'unicité d'une telle solution permettra alors de conclure. h est de classe C^∞ sur \mathcal{D} . On considère alors le problème de Cauchy d'inconnu y : $V \subset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ où V est un voisinage ouvert de 0,

$$\begin{cases} y'(z) = h'(z)y(z) & \forall z \in V \\ y(0) = \exp(h(0)) = 1 \end{cases}. \quad (2.2)$$

La fonction composée $\exp \circ h$ est alors une solution évidente sur \mathcal{D}' , son disque ouvert de convergence. Considérons maintenant la série formelle qui correspond au terme de droite de l'égalité 2.1 :

$$G(X) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \prod_{r=1}^{m(\tau)} h_{s_r}$$

qui satisfait $G(0) = 1$. Soit G' la série formelle dérivée de G et définissons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \prod_{r=1}^{m(\tau)} h_{s_r}$, avec $H_0 = 1$. Alors on a d'une part :

$$G'(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} H_{k+1}$$

et d'autre part, par produit de Cauchy,

$$h'(X)G(X) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{k+1}X^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} H_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k \sum_{i=0}^k \frac{h_{k+1-i}}{(k-i)!} \frac{H_i}{i!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} h_{k+1-i} H_i .$$

On cherche alors à réordonner le terme de droite. Pour $\tau = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{m(\tau)}\} \in \mathcal{P}_{[k]}$ comme il n'y a pas de notions d'ordres entre les parties de τ , on peut toujours noter \mathcal{S}_1 l'unique partie qui contient 1. On note alors $i \in [k]$ le nombre d'éléments qui sont en dehors de \mathcal{S}_1 (qui contient alors $k+1-i$ éléments et est associée au facteur h_{k+1-i} dans le produit). Il y a alors $\binom{k}{i}$ choix possibles pour les éléments en dehors de \mathcal{S}_1 , et $\{\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{m(\tau)}\}$ forme une partition d'un ensemble à i éléments (remarquons que dans la somme, la valeur des éléments de l'ensemble partitionné n'a aucune importance). Il s'ensuit que H_{k+1} se réécrit comme suit

$$H_{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} h_{k+1-i} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[i]}} \prod_{r=1}^{m(\tau)} h_{s_r} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} h_{k+1-i} H_i$$

et par identification on retrouve bien que

$$h'(X)G(X) = G'(X) .$$

L'unicité des solutions du problème de Cauchy 2.2 nous assure finalement que $G(X) = \exp(h(X))$, et comme h et \exp sont développables en série entière et que $h(0) = 0$, par composition de telles fonctions $\exp(h)$ est développable en série entière sur un disque ouvert $\mathcal{D}' \subset D$. Par unicité du développement en série entière on a finalement que son développement en série entière sur \mathcal{D}' est exactement $G(z)$. \square

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de l'expansion de Vere-Jones.

Démonstration du Théorème 2.5. Traitons le cas « homogène » où $Z = zI_n$. Dans le cas où la matrice Z n'est pas de cette forme, en particulier $Z \neq 0$, donc il existe $i_0 \in [n]$ tel que $z_{i_0} \neq 0$ et on pose alors $\hat{A} = (\frac{z_i}{z_{i_0}} a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Avec ce choix, chaque ligne de A est multipliée par un coefficient bien choisi de sorte que $ZA = z_{i_0} \hat{A}$, ce qui nous ramène au cas homogène : une fois la formule démontrée, on peut alors l'appliquer à la matrice \hat{A} et en exploitant la multilinéarité de l' α -permanent (sur les lignes), on retrouve alors le résultat souhaité.

Commençons par trouver un développement en série entière de $[\det(I_n - ZA)]^{-\alpha}$ en le passant ensuite sous forme exponentielle. Notons alors v_1, \dots, v_n les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes). Par hypothèse, on a que $|zv_i| < 1$ pour tout $i \in [n]$, et donc

$$\log \det[I_n - zA] = \sum_{i=1}^n \log(1 - zv_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(zv_i)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \text{Tr}(A^k) .$$

On applique alors le Lemme 2.6 en posant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $h_k = \alpha \text{Tr}(A^k)(k-1)!$. On obtient

$$[\det(I_n - ZA)]^{-\alpha} = \exp \left(\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \text{Tr}(A^k) \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \prod_{r=1}^{m(\tau)} \alpha \text{Tr}(A^{s_r})(s_r - 1)! .$$

Il suffit alors de montrer l'identité suivante pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} a_{i_1, i_1} & \cdots & a_{i_1, i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k, i_1} & \cdots & a_{i_k, i_k} \end{pmatrix} = \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \alpha^{m(\tau)} \prod_{r=1}^{m(\tau)} \text{Tr}(A^{s_r})(s_r - 1)! .$$

Le terme de gauche est en fait une double somme lorsque la Définition 1.2. Donc, en échangeant les deux sommes et en partitionnant les permutations selon les parties qu'elles laissent stables (ce qui forme alors une partition de $[n]$), on n'a plus qu'à prendre tous les produits possibles associés aux permutations dont la décomposition en cycles à supports disjoints est formée de cycles dont les supports sont exactement les éléments de cette partition. Finalement, pour $\tau = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{m(\tau)}\} \in \mathcal{P}_{[k]}$ et $r \in [m(\tau)]$, on note \mathcal{C}_r l'ensemble des s_r cycles sur l'ensemble $[s_r]$, on a alors :

$$\sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n} \text{perm}_\alpha \begin{pmatrix} a_{i_1, i_1} & \cdots & a_{i_1, i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k, i_1} & \cdots & a_{i_k, i_k} \end{pmatrix} = \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{[k]}} \alpha^{m(\tau)} \prod_{r=1}^{m(\tau)} \sum_{\sigma_r \in \mathcal{C}_r} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{s_r} \leq n} a_{i_1, i_{\sigma_r(1)}} \cdots a_{i_{s_r}, i_{\sigma_r(s_r)}} .$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{\sigma_r \in \mathcal{C}_r} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq n} a_{i_1, i_{\sigma_r(1)}} \cdots a_{i_s, i_{\sigma_r(i_s)}} = (s - 1)! \text{Tr}(A^s) .$$

On peut se convaincre facilement que pour $s \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\text{Tr}(A^s) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq n} a_{i_1, i_2} a_{i_2, i_3} \cdots a_{i_{s-1}, i_s} a_{i_s, i_1} .$$

Remarquons alors qu'en permutant les s sommes de toutes les manières possibles, on obtient toujours le même résultat, chaque terme de la somme de gauche correspond en fait à un arrangement différent des sommes, il y en a $(s - 1)!$ ils valent tous $\text{Tr}(A^s)$ ce qui donne alors le résultat souhaité et termine la démonstration. \square

Dans la suite du manuscrit nous étudierons l' α -déterminant et non plus l' α -permanent. Les résultats se transposent facilement au α -permanent grâce à la Remark 1.3.

2.3 Le théorème de décomposition de Crane pour l' α déterminant

L'objectif de cette section est d'exposer la preuve d'un théorème dû à Crane [Cra13, Théorème 1.1] qui permet d'exprimer l' α -déterminant d'une matrice comme combinaison linéaire de certains β -déterminants. Pour l'énoncer et le démontrer, nous avons besoin de quelques définitions préliminaires². On rappelle que $\mathcal{P}_{[n]}$ l'ensemble des partitions de $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Définition 2.7 (MATRICE DE PROJECTION). *Pour une partition $\pi \in \mathcal{P}_{[n]}$ on définit la projection de π sur M , notée $M.\pi$, la matrice de taille n définie, pour $1 \leq i, j \leq n$, par*

². Nous proposons ici une discussion en termes de α -determinants, alors que [Cra13, Théorème 1.1] est énoncé en termes de α -permanents. Les deux formulations sont équivalentes grâce à la Remark 1.3.

$$[M.\pi]_{i,j} = \begin{cases} M_{i,j} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont dans une même partie de } \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 2.8 (RAFFINEMENT). *On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un raffinement de $\pi \in \mathcal{P}_{[n]}$ si chaque cycle de la permutation σ est inclus dans une partie de la partition π . On note cette relation entre σ et π par $\sigma \leq \pi$. On peut comparer une permutation à une partition car la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation induit naturellement une partition.*

Par exemple, la partition associée à $\sigma_1 = (1, 3, 5) \circ (4) \circ (2, 6)$ est $\pi_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$. Inversement, des permutations associées à $\pi_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ peuvent être $\sigma_2 = (1, 3, 5) \circ (2, 4, 6)$; $\sigma_3 = (1, 5, 3) \circ (2, 4, 6)$; $\sigma_4 = (1, 3, 5) \circ (6, 4, 2)$ ect... Parmi les exemples proposés, on a $\sigma_1 \leq \pi_1$ mais que $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ ne sont pas des raffinements de π_1 . Par contre $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ_4 sont toutes des raffinements de π_2 .

Nous sommes prêts à énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 2.9 (DÉCOMPOSITION DE CRANE). *Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\det_{\alpha\beta}(M) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \beta^{n-\nu(\pi)} \left(\prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 - k\beta) \right) \det_{\alpha}(M.\pi) .$$

où (avec un léger abus de notation) $\nu(\pi)$ est le nombre de parties de π .

Démonstration. Tout d'abord on remarque que pour toute partition $\pi \in \mathcal{P}_{[n]}$ l'égalité suivante est vraie

$$\det_{\alpha}(M.\pi) = \sum_{\sigma \leq \pi} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} . \quad (2.3)$$

En effet, si σ n'est pas un raffinement de π dans le sens de la Définition 2.8, alors un des termes $[M.\pi]_{i,\sigma(i)}$ sera nul dans le produit.

Considérons maintenant la partie droite de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \beta^{n-\nu(\pi)} \left(\prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 - k\beta) \right) \det_{\alpha}(M.\pi) \\ &\stackrel{\text{Éq. 2.3}}{=} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \beta^{n-\nu(\pi)} \left(\prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 - k\beta) \right) \sum_{\sigma \leq \pi} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} . \end{aligned}$$

On peut maintenant intervertir l'ordre de sommation car les ensembles sont finis

$$\sum_{\substack{(\sigma,\pi) \in \mathfrak{S}_n \times \mathcal{P}_{[n]} \\ \sigma \leq \pi}} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \leq \pi}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_{[n]} \\ \pi \geq \sigma}}$$

et ce qui nous permet donc d'obtenir :

$$\mathcal{S} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} \right) \sum_{\pi \geq \sigma} \beta^{n-\nu(\pi)} \prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 - k\beta) .$$

Ensuite, en notant $S(n, k)$ le nombre de Stirling de seconde espèce qui représente le nombre de partitions de $[n]$ qui ont exactement k parties³, on a :

$$\mathcal{S} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} \right) \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} S(\nu(\sigma), j) \beta^{n-j} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - k\beta) .$$

Or, on a la propriété remarquable suivante :

$$\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} S(\nu(\sigma), j) \beta^{n-j} \left(\prod_{k=0}^{j-1} (1 - k\beta) \right) = \beta^{n-\nu(\sigma)} , \quad (2.4)$$

qu'on voit souvent écrite de cette manière $\sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} S(\nu(\sigma), j) \left(\frac{1}{\beta} \right)_j = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{\nu(\sigma)}$ (voir le bas de page), où

$(X)_n$ est la factorielle décroissante de X . La propriété 2.4 nous permet de conclure que $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \beta^{n-\nu(\pi)} \left(\prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 - k\beta) \right) \det_{\alpha}(M.\pi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\alpha\beta)^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n M_{i,\sigma(i)} = \det_{\alpha\beta}(M)$. \square

Remarque 2.10 (ÉCRITURE COMPACTE DE LA DÉCOMPOSITION DE CRANE). On peut écrire la formule de décomposition de Crane avec la factorielle décroissante comme suit :

$$\det_{\alpha\beta}(M) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} \beta^n \times \left(\frac{1}{\beta} \right)_{\underline{\nu(\pi)}} \det_{\alpha}(M.\pi) .$$

Remarque 2.11 (DÉCOMPOSITION DE CRANE POUR $\alpha = -1$). Pour $\alpha = -1$, l'énoncé du Théorème 2.9 est

$$\det_{\beta}(M) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{[n]}} (-\beta)^{n-\nu(\pi)} \prod_{k=0}^{\nu(\pi)-1} (1 + k\beta) \det(M.\pi) .$$

Cette observation est le point de départ de l'algorithme de Bell (Section 3.1).

3 Expériences numériques

Dans cette section, on propose une réflexion sur le calcul numérique de l'alpha déterminant. Différents graphiques et expériences numériques sont également présentés afin d'illustrer certains résultats développés dans les autres sections. Les notebooks python qui ont été utilisés sont disponibles aux liens suivants [Ter Det Alpha Fischer et Bootstrap](#) et [Simulation Numérique Zéros de Yang-Lee](#).⁴

3.1 Algorithmes déterministes : naïf et Bell

On présente ici deux algorithmes déterministes pour calculer l' α -déterminant numériquement.

Le premier, que nous appellerons **algorithme naïf**, consiste à appliquer la formule de la Définition 1.1.

L'algorithme naïf fait intervenir :

3. Voir e.g. <https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html>

4. Les notebook sont accessibles sans compte google, on peut également les télécharger au format pdf, iypnb et py. Un compte google est par contre nécessaire si on veut exécuter en ligne un notebook ou le modifier.

- une fonction auxiliaire `Générer_permutations(n)` qui génère toutes les permutations de \mathfrak{S}_n ;
- une fonction auxiliaire `nombre_de_cycles(sigma)` qui renvoie le nombre de cycles d’une permutation `sigma`.

Le deuxième algorithme, que nous nommerons **algorithme de Bell**, consiste à appliquer la conséquence de la décomposition de Crane mentionnée dans la Remark 2.11. L’algorithme de Bell fait intervenir :

- une fonction auxiliaire `generer_partitions(E)` qui génère toutes les partitions de l’ensemble `E` ;
- une fonction auxiliaire `matrice_proj(M, pi)` qui calcule la projection $M.\pi$.

Nous reproduisons le pseudocode des deux algorithmes respectivement dans les tableaux Algorithm 1 et Algorithm 2.

Algorithm 1 Calcul du alpha déterminant avec l’algorithme naïf

```

1: Fonction alpha_determinant_naif( $\alpha$ ,  $M$ )
2:  $n \leftarrow \text{taille}(M)$ 
3:  $resultat \leftarrow 0$ 
4:  $liste\_perm \leftarrow \text{Générer\_permutations}(n)$ 
5: for chaque  $\sigma$  dans  $liste\_perm$  do
6:    $prod \leftarrow 1$ 
7:    $\nu \leftarrow \text{nombre\_de\_cycles}(\sigma)$ 
8:   for  $i$  allant de 0 à  $n$  do
9:      $prod \leftarrow prod \times M_{i,\sigma(i)}$ 
10:  end for
11:   $resultat \leftarrow resultat + \alpha^{(n-\nu)} \times prod$ 
12: end for
13: return  $resultat$ 

```

3.1.1 Comparaison des complexités temporelles

La complexité temporelle mesure la vitesse d’exécution d’un algorithme [Ver24]. Elle est calculée en regardant le nombre total d’opérations fondamentales effectuées par l’algorithme. Ces opérations incluent les comparaisons, les affectations, les accès à un tableau, l’analyse des structures de contrôle telles que les boucles et les conditions.

Calcul de complexité de l’algorithme naïf. En référence à Algorithm 1, la complexité de la fonction `Générer_permutations(n)` est en $O(n!)$. Parcourir la liste des permutations a une complexité en $O(n!)$. La complexité de `nombre_de_cycles(sigma)` est en $O(n)$, en effet tant que tous les entiers n’ont pas été parcourus, on récupère les éléments qui sont dans un même cycle pour chaque entier en appliquant σ successivement à ce dernier jusqu’à retomber sur le nombre de départ. On ne recherche pas à nouveau les éléments qu’on a déjà trouvés, si bien que cela revient à parcourir la liste des entiers de 1 à n en un nombre constant de fois.

Algorithm 2 Calcul de l'alpha déterminant avec l'algorithme de Bell

```
Fonction alpha_determinant_bell( $\alpha, M$ )  
 $n \leftarrow$  taille( $M$ )  
 $liste\_partitions \leftarrow$  generer_partitions(liste(0 jusqu'à  $n - 1$ ))  
 $resultat \leftarrow 0$   
for chaque  $partition$  dans  $liste\_partitions$  do  
   $p \leftarrow$  longueur( $partition$ )  
   $M\_proj \leftarrow$  matrice_proj( $M, partition$ )  
   $prod \leftarrow 1$   
  for chaque  $k$  dans 0 jusqu'à  $p - 1$  do  
     $prod \leftarrow prod \times (1 + k \times \alpha)$   
  end for  
   $resultat \leftarrow resultat + (-\alpha)^{(n-p)} \times prod \times det(M\_proj)$   
end for  
return  $resultat$ 
```

Au vu de la complexité de ces fonctions auxiliaires et de la structure des boucles for dans Algorithm 1, la complexité de l'algorithme naïf est en

$$O(n!) + \sum_{k=1}^n (O(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(1)) = O((n+1)!).$$

Calcul de complexité de l'algorithme de Bell. En référence à Algorithm 2, la complexité pour générer toutes les partitions est en $O(B(n))$, où $B(n)$ est le n -ième nombre de Bell. Pour calculer la projection $M.\pi$, la complexité est dans le pire des cas en $O(n^3)$, c'est lorsque la partition π est constituée de n singletons. Au contraire dans le meilleur des cas lorsque π ne contient qu'un ensemble, la complexité est en $O(n^2)$. On admet que le calcul du déterminant avec la bibliothèque numpy est en $O(n^3)$. Enfin le calcul simultané de $\alpha^{n-\nu(\pi)}$ et $\prod_{k=1}^{\nu(\pi)} (1 + k\alpha)$ est toujours en $O(n)$ quelque soit le nombre de parties de π car $\nu(\pi) \leq n$. Au vu de ces complexités, on déduit que la complexité totale de l'algorithme de Bell est en

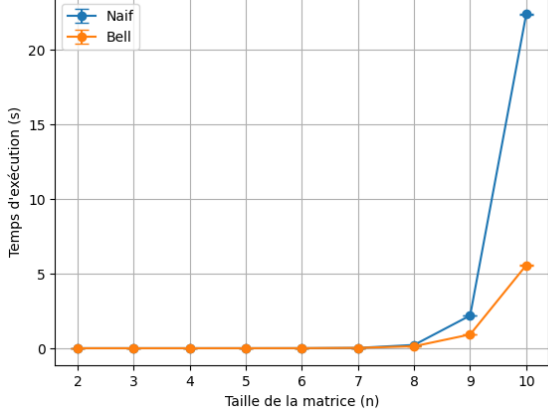
$$O(B(n)) + \sum_{k=1}^{B(n)} (O(n^3) + O(n) + O(n^3)) = O(n^3 B(n)).$$

Il est bien connu que la série génératrice exponentielle associée aux nombres de Bell est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$ [FGN01, Exercice 1.6, Nombre de Bell, p14]. Il s'agit d'une fonction holomorphe sur \mathbb{C} dont le développement analytique en 0 a un rayon de convergence infini. Ceci implique que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}^+$ on a $\frac{n^p B_n R^n}{n!}$ qui converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, car c'est le terme général d'une série convergente.

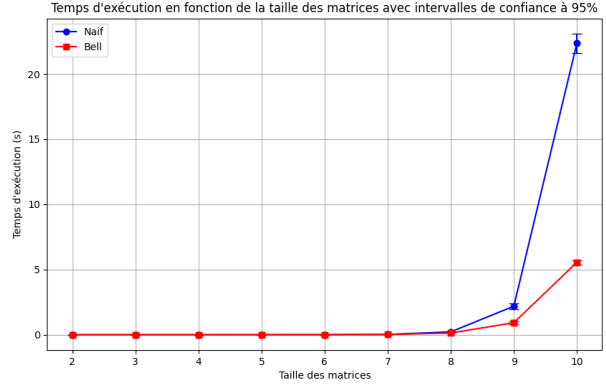
En particulier dans le cas qui nous intéresse, $\frac{n^3 B(n)}{(n+1)!} = o(1)$ ce qui prouve que pour de grandes valeurs de n , l'algorithme de Bell est plus efficace que l'algorithme naïf.

Procédons à une expérience numérique avec le protocole suivant. On mesure le temps d'exécution des deux algorithmes précédents pour calculer le 5-déterminant de $p = 30$ matrices de taille $n \leq 10$, générées aléatoirement avec l'instruction `np.random.rand(n,n)`. Les n^2 coefficients de telles matrices sont des variables i.i.d de loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$.

Moyennes des temps d'exécution avec intervalles de confiance (95%)



(a) Temps d'exécution du 5-déterminant (méthode de Fisher pour les intervalles de confiance)



(b) Temps d'exécution du 5-déterminant, (méthode bootstrap pour les intervalles de confiance)

Les intervalles de confiance à 95% ont été calculés tantôt avec le théorème de Fisher [Dus18, Section 4.2, Intervalle de Confiance et Moyenne] en supposant que les temps d'exécution empiriques suivent une loi normale (Figure 3.1a), tantôt avec la méthode bootstrap [DH97, Chapter 5, Confidence Intervals] qui s'appuie sur des ré-échantillonnages (Figure 3.1b). Les deux méthodes donnent des intervalles de confiance très petits comparativement au temps d'exécution pour des matrices de taille $n = 10$.

Pour mieux observer les variations on peut regarder le logarithme du temps d'exécution (Figure 3.2).

Moyennes des logarithmes des temps d'exécution avec intervalles de confiance (95%)

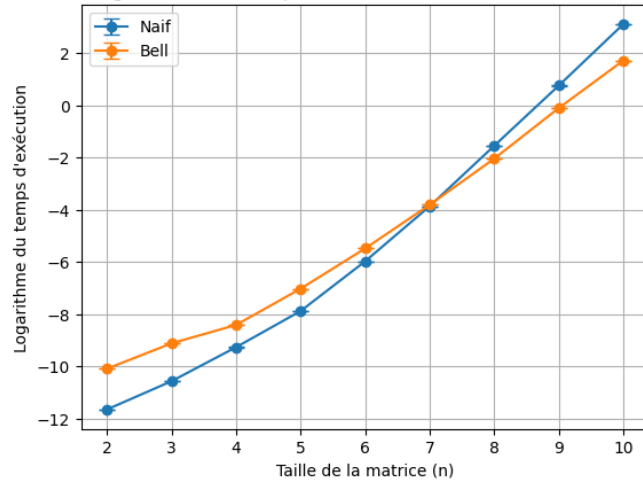


FIGURE 3.2 – Logarithme des moyennes des temps d'exécution du 5-déterminant (méthode de Fisher pour les intervalles de confiance).

On constate comme attendu que pour des petites valeurs de n , l'algorithme naïf est plus efficace que l'algorithme de Bell. À partir de $n = 7$, la tendance s'inverse, et on peut s'attendre à ce que la complexité de l'algorithme naïf devient très supérieure à l'algorithme de Bell. Cette observation est d'ailleurs cohérente avec les valeurs de la table suivante.

TABLE 1 – Valeurs de $n^3 B(n)$ et $(n + 2)!$

n	$n^3 \times B(n)$	$(n + 2)!$
2	16	24
3	135	120
4	960	720
5	6 500	5 040
6	43 848	40 320
7	300 811	362 880
8	2 119 680	3 628 800
9	15 416 163	39 916 800
10	115 975 000	479 001 600

3.1.2 Comparaison des précisions

On pourrait s'attendre à ce que l'algorithme de Bell soit la solution idéale pour des études d' α -déterminant pour n grand. Cependant, la méthode de Bell peut conduire au calcul des déterminants de matrices quasi-singulières, ce qui peut introduire du bruit. On prend pour exemple le calcul de $\alpha \mapsto \det_\alpha(J_6 + 200(E_{1,1} + E_{2,3}))$ dont on sait qu'il s'agit du polynôme $\alpha \mapsto (201 + 41009\alpha + 820\alpha^2)(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)$ (voir la Section 4.2). On peut comparer les tracés obtenus avec la fonction polynomiale théorique, l'algorithme naïf et l'algorithme de Bell. Les trois tracés semblent parfaitement coïncider (Figure 3.3).

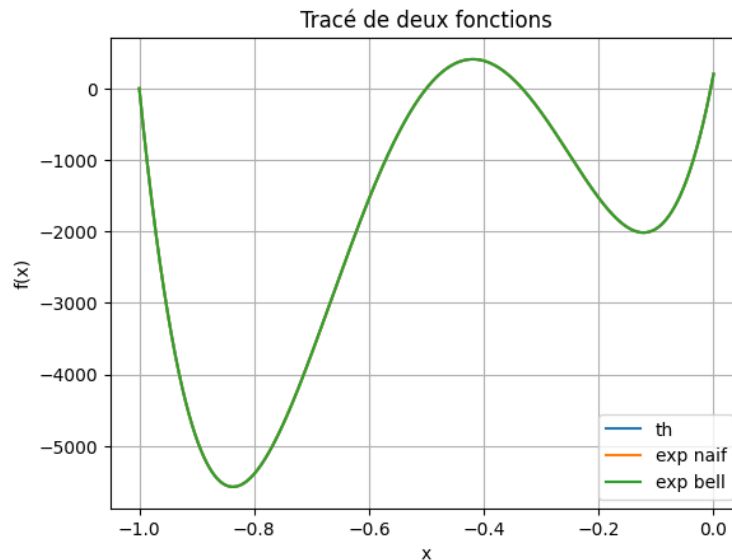
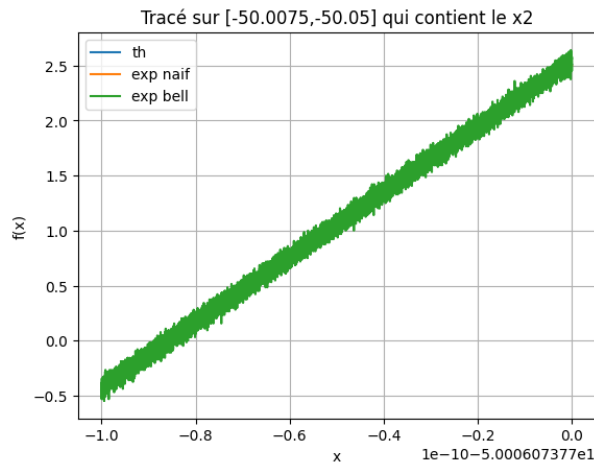
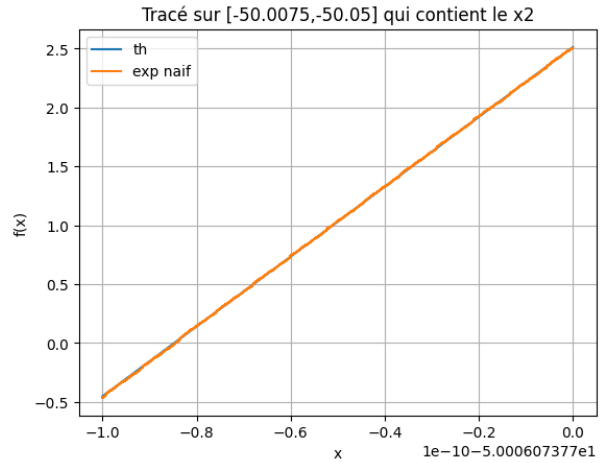


FIGURE 3.3 – Tracé d'un polynôme alpha permanent

Pourtant si on zoom plus le graphique, on constate un bruit vert pour l'algorithme de Bell qui s'avère donc moins précis que l'algorithme naïf (Figure 3.4a). Si on continue de zoomer, l'algorithme naïf lui aussi présente du bruit, mais à une échelle moins importante (Figure 3.5).



(a) Une erreur de précision apparaît pour l'algo de Bell



(b) L'algo naïf reste précis

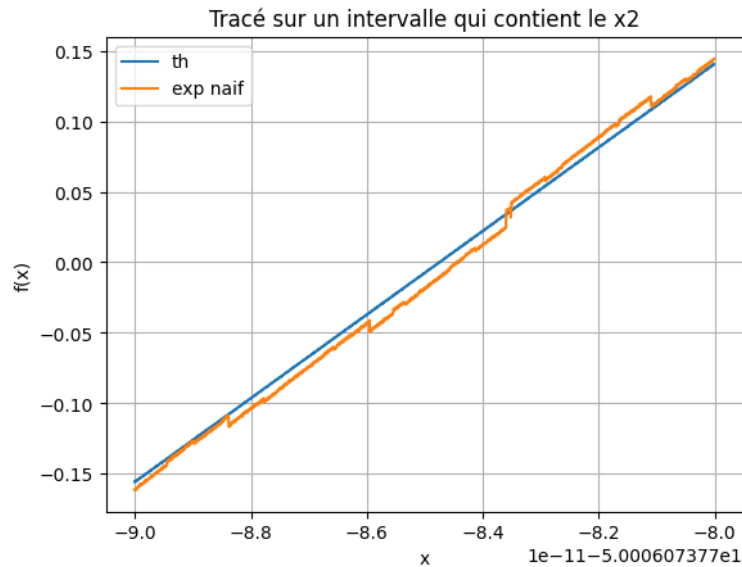


FIGURE 3.5 – Tracé d'un polynôme alpha permanent zoom maximal

3.2 Expérience sur les Zéros de Yang-Lee Aléatoires

Pour chaque taille de matrice $3 \leq n \leq 10$, on tire 300 fois selon une loi uniforme deux positions (i, j) et (p, l) ainsi qu'une perturbation ϵ selon une des trois lois à variables entières étudiées à la section 6.2 et on compte les zéros de Yang Lee de $\det_{\alpha}(J_n + \epsilon(E_{i,j} + E_{p,l}))$ qui sont réels. Les proportions empiriques sont très proches des probabilités théoriques qui ont été établies. On présente les graphiques ci-après.

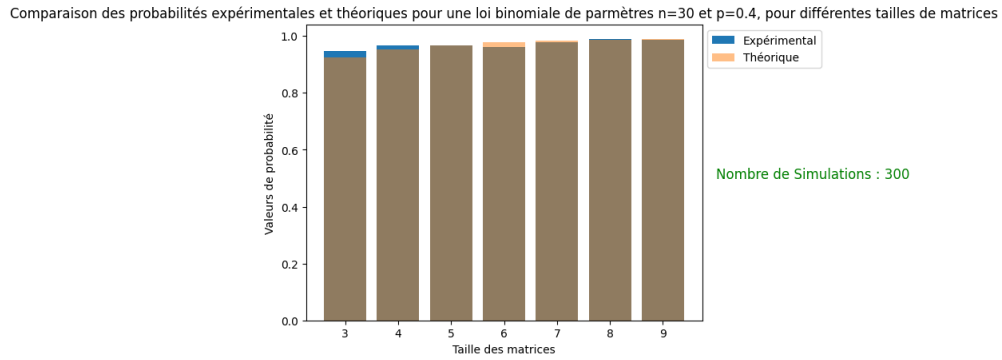


FIGURE 3.6 – Simulation pour $\epsilon \sim \mathcal{B}(30, 0.4)$

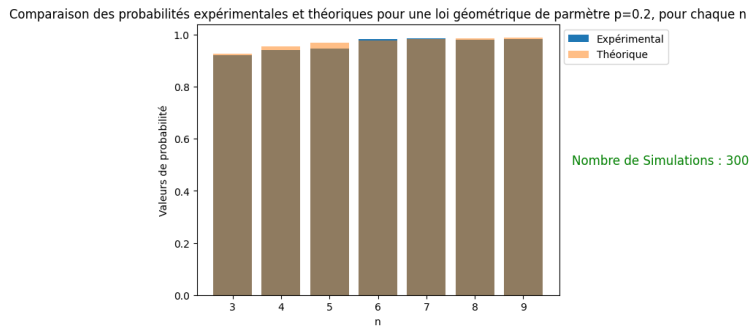


FIGURE 3.7 – Simulation pour $\epsilon \sim \mathcal{G}(0.2)$

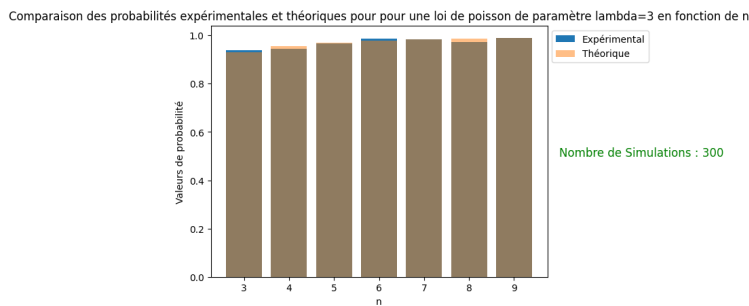


FIGURE 3.8 – Simulation pour $\epsilon \sim \mathcal{P}(3)$

4 Résultats analytiques

Dans la suite, on étudie la répulsion déterministe des zéros de Yang-Lee.

4.1 Une unique perturbation

L'objectif de cette section est de répondre à la question suivante "comment sont déplacés les zéros de Yang-Lee pour une perturbation $\epsilon \in \mathbb{R}$ à la position i, j de J_n ?" C'est-à-dire, on se demande quelles sont les racines de $\det_\alpha(J_n + \epsilon E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice de taille n qui contient un 1 en position (i, j) et des 0 partout ailleurs.

Proposition 4.1. *Il existe un polynôme linéaire en (α, ϵ) noté $P_{i,j}^{n,\epsilon}$, tel que $\det_\alpha(J_n + \epsilon E_{i,j}) = P_{i,j}^{n,\epsilon}(\alpha) \times \det_\alpha(J_{n-1})$. En particulier,*

$$P_{i,j}^{n,\epsilon}(\alpha) = \begin{cases} 1 + \epsilon + (n-1)\alpha & i = j \\ 1 + (n-1 + \epsilon)\alpha & i \neq j \end{cases}.$$

Démonstration. D'après la Définition 1.1, en distinguant les permutations selon qu'elles envoient ou non i sur j , on a

$$\det_\alpha(J_n + \epsilon E_{i,j}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j}} \alpha^{n-\nu(\sigma)}(1 + \epsilon) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i) \neq j}} \alpha^{n-\nu(\sigma)},$$

d'où $\det_\alpha(J_n + \epsilon E_{i,j}) = \epsilon \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} \alpha^{n-\nu(\sigma)} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)}$. En appliquant la Proposition A.2 à la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \nu) \mapsto \alpha^{n-\nu}$ et en se souvenant du Lemme 1.7, on obtient immédiatement le résultat annoncé. \square

Theorem 4.2 (PERTURBATION DÉTERMINISTE UNIQUE). *Pour tout $i, j \in [n]$, $YL(J_n + \epsilon E_{i,j}) \subset \mathbb{R}$. Plus précisément, les $n-2$ premiers zéros de Yang-Lee $\{-\frac{1}{k}, k \in [n-2]\}$ ne sont pas déplacés et le plus grand zéro de Yang-Lee $\frac{-1}{n-1}$ devient*

$$\begin{cases} -\frac{1+\epsilon}{n-1} & i = j \\ -\frac{1}{n-1+\epsilon} & i \neq j \end{cases}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire immédiat de la Proposition 4.1. \square

4.2 Perturbation double

L'objectif de cette section est de répondre à la question suivante « comment sont déplacés les zéros de Yang-Lee de J_n pour une perturbation $\epsilon \in \mathbb{R}$ simultanément à la position (i, j) et (p, l) de J_n ? » C'est-à-dire, on se demande quelles sont les racines de $\det_\alpha(J_n + \epsilon(E_{i,j} + E_{p,l}))$, pour $(i, j); (p, l) \in [n]^2$.

Pour répondre à cette question on a besoin d'une définition préliminaire.

Définition 4.3. *Soient $(i, j); (p, l) \in [n]^2$ deux positions. On introduit les définitions suivantes :*

(ML) *les deux positions sont sur la même ligne ou la même colonne lorsque $i = p$ ou $j = l$;*

- (1D) exactement une position est sur la diagonale lorsque $i = j$ ou (exclusif) $p = l$;
(2D) les deux positions sont sur la diagonale lorsque $i = j$ et $p = l$;
(2HD) les deux positions sont en dehors de la diagonale lorsque $i \neq j$ et $p \neq l$;
(S) les deux positions sont symétriques lorsque $i = l$ et $j = p$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.4. *Si les deux positions perturbées sont de type (ML), alors il existe un polynôme $P_{i,j,p,l}$ de degré au plus 1 tel que : $\det_{\alpha}(J_n + \epsilon(E_{i,j} + E_{p,l})) = P_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}(\alpha) \times \det_{\alpha}(J_{n-1})$.*

Si les deux positions perturbées sont du type (not ML) alors il existe un polynôme $Q_{i,j,p,l}$ de degré au plus 2 tel que : $\det_{\alpha}(J_n + \epsilon(E_{i,j} + E_{p,l})) = Q_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}(\alpha) \times \det_{\alpha}(J_{n-2})$.

En outre on peut expliciter les polynômes $P_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}$ et $Q_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}$ selon les différentes configurations possibles :

$$(ML) : P_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}(\alpha) = \begin{cases} 1 + 2\epsilon + (n-1)\alpha & (2D) \\ 1 + \epsilon + (n + \epsilon - 1)\alpha & (1D) \\ 1 + (n + 2\epsilon - 1)\alpha & (2HD) \end{cases},$$

$$(not ML) : Q_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}(\alpha) = \begin{cases} (n-2)(n-1)\alpha^2 + [2n(\epsilon+1) - 4\epsilon - 3]\alpha + (\epsilon+1)^2 & (2HD) \\ (n-1+\epsilon)(n-2)\alpha^2 + (\epsilon^2 + n\epsilon - \epsilon + 2n - 3)\alpha + \epsilon + 1 & (1D) \\ [(\epsilon+n)^2 - 4\epsilon - 3n + 2]\alpha^2 + (2\epsilon + 2n - 3)\alpha + 1 & (2HD) \text{ and not (S)} \\ (n-1+2\epsilon)(n-2)\alpha^2 + [2n + (\epsilon+3)(\epsilon-1)]\alpha + 1 & (S) \end{cases}.$$

Démonstration. On reproduit la même stratégie de la preuve de la Proposition 4.1 : nous distinguons dans Définition 1.1 les permutations qui envoient à la fois i sur j et p sur l , les permutations qui envoient i sur j mais pas p sur l , les permutations qui envoient p sur l mais pas i sur j et enfin les autres permutations qui n'envoient ni i sur j , ni p sur l ... on obtient :

$$\det_{\alpha}(J_n + \epsilon E_{i,j} + \epsilon E_{p,l}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j \\ \sigma(p)=l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)}(1+\epsilon)^2 + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j \\ \sigma(p) \neq l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)}(1+\epsilon) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i) \neq j \\ \sigma(p)=l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)}(1+\epsilon) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i) \neq j \\ \sigma(p) \neq l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)}.$$

En regroupant les termes qui vont bien ensemble on obtient

$$\det_{\alpha}(J_n + \epsilon E_{i,j} + \epsilon E_{p,l}) = \epsilon^2 \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)} + \epsilon \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} \alpha^{n-\nu(\sigma)} + \epsilon \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}} \alpha^{n-\nu(\sigma)} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)}.$$

L'énoncé suit immédiatement en appliquant la Proposition A.3 à la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \nu) \mapsto \alpha^{n-\nu}$, en se souvenant du Lemme 1.7 et des calculs fastidieux mais élémentaires. \square

Nous pouvons alors annoncer notre résultat dans le cas d'une double perturbation.

Theorem 4.5 (RÉPULSION DE ZÉROS DE YANG-LEE). *Pour $n \geq 3$ et $i, j, p, l \in [n]$, $YL(J_n + \epsilon E_{i,j} + \epsilon E_{p,l}) \subset \mathbb{R}$, sauf dans les cas suivants :*

- Les deux positions perturbées sont distinctes et toutes les deux sur la diagonale ($i = j, p = l, i \neq p$) avec

$$|2\epsilon + 1| > \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}.$$

- Les deux positions perturbées sont toutes les deux en dehors de la diagonale et ne sont ni symétriques ni sur la même ligne ou la même colonne [$i \neq p, j \neq l, i \neq j$ et $p \neq l$ et ($i \neq l$ ou $j \neq p$)] avec

$$\epsilon < -\frac{1}{4}.$$

Dans ce deux cas, on parlera alors de **répulsion de zéros de Yang-Lee**. Dans tous les cas, les $n - 3$ zéros de Yang-Lee triviaux réels : $\{-\frac{1}{k}, k \in [n - 3]\}$ subsistent.

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire de la Proposition 4.4 . En effet, les racines sont complexes seulement dans les cas où le polynôme $Q_{i,j,p,l}^{n,\epsilon}$ est effectivement de degré 2 et a son discriminant strictement négatif. En faisant les calculs on obtient le résultat annoncé. \square

4.3 La perturbation diagonale εI_n

On s'intéresse dans cette section à l'étude de $\det_\alpha(J_n + \varepsilon I_n)$ pour un ε réel fixé. On montre que celui-ci s'exprime en fonction d'autres α -déterminant, et que c'est finalement un polynôme explicite de α et ε . Pour ce faire nous avons besoin de ce résultat préliminaire.

Lemme 4.6. *Soit D_n l'ensemble des dérangements de \mathfrak{S}_n (voir Définition A.5). Alors*

$$\det_\alpha(J_n - I_n) = \sum_{\sigma \in D_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha^{n-i} \left[\sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{n}{l} |s(n-l, i-l)| \right].$$

Démonstration. Considérons $\det_\alpha(J_n - I_n)$. Pour qu'une permutation contribue à un terme non nul, elle ne peut contenir aucun point fixe, donc $\det_\alpha(J_n - I_n) = \sum_{\sigma \in D_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)}$, où D_n sont les dérangements de \mathfrak{S}_n . Il ne reste plus qu'à regrouper les dérangements en fonction du nombre de cycles. Le nombre de dérangements de \mathfrak{S}_n avec i cycles, noté $T(n, i)$, s'obtient facilement par récurrence (voir Lemme A.11). Il est donné par

$$T(n, i) = \sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{n}{l} |s(n-l, i-l)|.$$

Pour conclure, il suffit d'observer que, comme pour un dérangement $\sigma \in D_n$, chaque cycle est constitué d'au moins deux éléments (car c'est un dérangement) la somme s'arrête en fait à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ car les autres termes sont nuls. \square

Théorème 4.7 (PERTURBATION DIAGONALE).

$$\det_\alpha(J_n + \varepsilon I_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \varepsilon)^{n-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^{k-i} \left[\sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{k}{l} |s(k-l, i-l)| \right].$$

Démonstration. La démonstration consiste à regrouper les permutations selon le cardinal du sous-ensemble de $[n]$ fixé et l'utilisation du Lemme 4.6. Plus précisément

$$\begin{aligned}
\det_{\alpha}(J_n + \varepsilon I_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-c(\sigma)} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_{i, \sigma(i)} \varepsilon) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \sum_{\sigma \in \text{Fix}_n(I)} \alpha^{n-\nu(\sigma)} (1 + \varepsilon)^k \text{ par le lemme A.8} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \varepsilon)^k \sum_{\sigma \in \text{Fix}_n(1, \dots, k)} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \text{ par le lemme A.9} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \varepsilon)^k \sum_{\sigma \in D_{n-k}} \alpha^{n-k-\nu(\sigma)} \text{ par le lemme A.10} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + \varepsilon)^{n-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^{k-i} \left[\sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{k}{l} |s(k-l, i-l)| \right] \text{ par le lemme 4.6 .}
\end{aligned}$$

□

5 Zéros de Yang-Lee aléatoires

Dans la suite, on étudie la répulsion aléatoire des zéros de Yang-Lee.

5.1 Trois résultats généraux

Soit \mathcal{E} une variable aléatoire réelle. L'objectif de cette section est de décrire dans quelques cas la probabilité que les zéros de Yang-Lee soient réels lorsque J_n est bruité par des copies indépendantes de \mathcal{E} .

Plus précisément, on note P l'ensemble des positions perturbées et Y_P les zéros de Yang-Lee associés, c.-à-d. $Y_P = \text{YL}(J_n + \mathcal{E} \sum_{(i,j) \in P} E_{i,j})$. D'après la Section 4, on a les résultats suivants :

Theorem 5.1 (PERTURBATION UNIQUE). *Si $\text{Card}(P) = 1$ alors $\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = 1$.*

Démonstration. C'est immédiat d'après la Proposition 4.1. □

Theorem 5.2 (PERTURBATION DOUBLE). *Si $\text{Card}(P) = 2$, en notant $J = \{(i, j), (p, l)\}$, on a :*

$$\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(|2\mathcal{E} + 1| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\right) & i = j, p = l \text{ et } i \neq p \\ \mathbb{P}\left(\mathcal{E} \geq -\frac{1}{4}\right) & i \neq p, j \neq l, i \neq j \text{ et } p \neq l \text{ et } (i \neq l \text{ ou } j \neq p) \end{cases} .$$

Dans tous les autres cas : $\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = 1$.

Démonstration. C'est une application immédiate de la Proposition 4.4. □

On peut également supposer que (i, j, p, l) est une variable aléatoire qui (par exemple) suit la loi uniforme sur $[n]^4$. On a :

Théorème 5.3. Soient i, j, p, l i.i.d. de loi $\text{Unif}_{[n]}$ et soit $P = (i, j, p, l)$. Alors,

$$\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = 1 - \frac{n-1}{n^3} \times \mathbb{P}\left(|2\mathcal{E} + 1| > \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\right) - \frac{(n-1)^2(n-2)}{n^3} \times \mathbb{P}\left(\mathcal{E} < -\frac{1}{4}\right).$$

Démonstration. On considère les deux évènements suivants :

A : « les positions (i, j) et (p, l) sont distinctes et toutes les deux sur la diagonale » ;

B : « les positions (i, j) et (p, l) sont toutes les deux en dehors de la diagonale, ne sont pas symétriques, et ne sont pas sur une même ligne ou une même colonne »

Il s'agit des deux évènements qui permettent d'obtenir des racines complexes : par rapport à la Définition 4.3, on a $A = \mathbf{(2D)}$ and not $\mathbf{(ML)}$ et $B = \mathbf{(2HD)}$ and not $\mathbf{(S)}$ and not $\mathbf{(ML)}$, que l'on a écrit sous la forme suivante dans le Theorem 5.2

$$A = (i = j) \cap (p = l) \cap (i \neq p),$$

$$B = (i \neq j) \cap (i \neq p) \cap (l \neq p) \cap (l \neq j) \cap [(i \neq l) \cup (j \neq p)].$$

En utilisant la formule de probabilités totales on a

$$\mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R}) = \mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | \bar{A} \cap \bar{B}) \times \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

D'après le Theorem 5.2, on a $\mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | \bar{A} \cap \bar{B}) = 0$ ainsi que $\mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | A) = \mathbb{P}\left(|2\epsilon + 1| > \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2}}\right)$ et $\mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R} | B) = \mathbb{P}\left(\epsilon < \frac{-1}{4}\right)$. Cela nous permet d'obtenir

$$\mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R}) = \mathbb{P}\left(|2\epsilon + 1| > \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2}}\right) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\epsilon < \frac{-1}{4}\right) \times \mathbb{P}(B). \quad (5.1)$$

Or, il y a n^4 uplet possibles (i, j, p, l) , et par définition de $\text{Unif}_{[n]}$, on a que $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n^4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{n^4}$. Pour conclure il ne nous reste qu'à trouver $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$. Construire un élément de A , revient à choisir une position pour (i, j) sur la diagonale, il y a n choix possibles, puis une position pour (p, l) également sur la diagonale mais distincte de (i, j) , il y a $n-1$ choix possibles. On a donc $\text{Card}(A) = n(n-1)$ et donc $\mathbb{P}(A) = \frac{n-1}{n^3}$.

Construire un élément de B , revient à choisir une position (i, j) qui soit en dehors de la diagonale, il y a $n(n-1)$ choix possibles. Ensuite, on choisit une position (p, l) qui ne doit pas être symétrique à (i, j) (1 position), ne pas être sur la même ligne ou la même colonne que (i, j) ($2n$ positions), ne pas être sur la diagonale (n positions). On retire les positions interdites qu'on a compté deux fois à savoir : (i, j) ; (i, i) et (j, j) et on a donc $n^2 - (1 + 2n + n - 3) = n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$ choix possibles pour (p, l) . Finalement, $\text{Card}(B) = n(n-1)^2(n-2)$ et donc $\mathbb{P}(B) = \frac{(n-1)^2(n-2)}{n^3}$.

En reportant ces deux résultat dans Equation (5.1), on obtient le résultat annoncé, en rappelant que $\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = 1 - \mathbb{P}(Y_P \not\subset \mathbb{R})$. \square

5.2 Quelques applications

Variabes aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Dans ce cas $\mathbb{P}(\mathcal{E} \geq -\frac{1}{4}) = 1$ et $\mathbb{P}(|2\mathcal{E} + 1| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}) = \mathbb{P}(\mathcal{E} = 0)$. Tout dépend donc de $\mathbb{P}(\mathcal{E} = 0)$, et si P est choisi comme dans le Théorème 5.3, on a : $\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = 1 - (1 - \mathbb{P}(\mathcal{E} = 0))^{\frac{n-1}{n^3}}$. Par exemple :

$$\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 - (1 - (1 - s)^r)^{\frac{n-1}{n^3}} & \mathcal{E} \sim \text{Binom}(r, s) \\ 1 - \frac{n-1}{n^3} & \mathcal{E} \sim \text{Geom}(p) \\ 1 - (1 - e^{-\lambda})^{\frac{n-1}{n^3}} & \mathcal{E} \sim \text{Poisson}(\lambda) \end{cases} .$$

Variabes aléatoires réelles continues. On se place par souci de simplicité dans le cas où $P = \{(i, i), (j, j)\}$ et $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(-\frac{1}{2}, 1)$. En utilisant le fait bien connu que si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors X^2 admet $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$ comme densité de probabilité, on a :

$$\mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = \int_0^{\frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n-2} \right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n-2} \right), \frac{1}{2}\right) \right)$$

où on a introduit respectivement la fonction Γ d'Euler et la fonction Γ incomplète supérieure [J.L16]. Le théorème de convergence dominée assure la bonne définition de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n-2} \right), \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) .$$

Il vient alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_P \subset \mathbb{R}) = \frac{1}{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right) = 0.387024^+ .$$

6 Conclusions et perspectives

En conclusion, d'une part l'endroit où l'on perturbe les Zéros de Yang-Lee joue un rôle crucial dans la manière dont les zéros sont déplacés et notamment s'ils peuvent quitter la droite réelle. Cela peut sembler contre-intuitif, car toutes les positions semblent identiques, mais cela s'explique par le fait qu'échanger une ligne ou une colonne ne préserve pas l' α -déterminant contrairement au déterminant (au signe près). On ne peut donc pas à partir d'un ensemble de positions perturbées se ramener à n'importe quel autre ensemble de positions. En effet seule la permutation simultanée de deux lignes et deux colonnes préserve l' α déterminant. Les groupements qu'on a fait par exemple pour une perturbation : (D) et (HD) ou encore pour deux perturbations, (ML et 1D), (ML et 2HD), (not ML et 1HD) , (not ML et 2D), (S) ect... sont en fait des "classes d'équivalence" pour cette relation : $x\mathcal{R}y$ équivaut à x peut être déplacé à y par des permutations simultanées de deux lignes et deux colonnes". Plus le nombre de perturbation augmente, plus le nombre de ces classes d'équivalence augmente, et donc plus de cas possibles apparaîtront. Approfondir le point de vue précédent constitue une perspective intéressante. En outre, on a perturbé avec seulement une même copie de epsilon, on aurait pu introduire des perturbations différentes, ce qui donnerait plus de degrés de liberté pour que les discriminants des $Q_{i,j}^{n,\epsilon,\epsilon'}$ soit strictement négatifs, et donc il y aurait eu mécaniquement plus de classes de positions pour obtenir des zéros de Yang-Lee non-réels. En effet, pour le cas de deux perturbations avec un même epsilon, il n'y avait que deux classes de deux positions qui donnaient des racines complexes. En conséquence la probabilité d'obtenir des zéros de Yang-Lee non réels, était assez faible, autour de 5% pour des variables aléatoires à valeurs entières).

D'autre part, calculer numériquement l'alpha déterminant ou même le permanent de façon efficace (notamment en terme de complexité temporelle) reste un problème ouvert. En essayant de le calculer directement de façon déterministe comme avec algorithme naïf et algorithme de Bell, on ne peut pas aller plus loin que des matrices de taille 11, 12 en un temps raisonnable (explosion combinatoire). Une perspective possible serait d'utiliser des algorithmes stochastiques. C'est par exemple le cas de Barvinok [Bar20] qui a montré qu'il existe un schéma d'approximation randomisé entièrement en temps polynomial pour le permanent de A une matrice hermitienne positive semi-définie ayant ses valeurs propres comprises entre 0 et 2 en écrivant le permanent de A comme une intégrale d'une fonction log-concave.

A Résultats utiles sur \mathfrak{S}_n , $\mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}$, positions perturbées et les dérangements D_n

On présente dans cette annexe des résultats utiles sur le groupe symétrique \mathfrak{S}_n et l'ensemble des dérangements D_n .

Soit $\nu(\sigma)$ le nombre de cycles de la permutation σ .

Lemme A.1. *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a $\nu(\sigma) = \nu(\sigma^{-1})$.*

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$ est un cycle. On a directement que $\sigma^{-1} = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$. Donc $\nu(\sigma) = 1 = \nu(\sigma^{-1})$ et le résultat est prouvé dans ce cas.

Pour traiter le cas général on utilise le fait que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de cycles à supports disjoints. Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que l'on écrit comme $\sigma = c_1 \cdots c_k$ comme produit de cycles à supports disjoints. Le résultat précédent donne que, puisque $\sigma^{-1} = c_1^{-1} \cdots c_k^{-1}$, alors $\nu(\sigma) = k = \nu(\sigma^{-1})$, ce qui achève la preuve. \square

On considère une position $(i, j) \in [n]^2$. On dit que (i, j) est *sur la diagonale* lorsque $i = j$. On dit que (i, j) est *en dehors de la diagonale* lorsque $i \neq j$. On pose $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(i) = j\}$.

Proposition A.2. *Soit E et F deux ensembles quelconques. On a pour toute application $f : E \times \mathbb{N} \rightarrow F$ et tout $x \in E$:*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}} f(x, \nu(\sigma)) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} f(x, \nu(\sigma) + 1) & \text{si } (i, j) \text{ est sur la diagonale} \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} f(x, \nu(\sigma)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Si on note ι l'inclusion naturelle de $\mathfrak{S}_n^{n \rightarrow n}$ dans \mathfrak{S}_{n-1} et on note $f_i : \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{n \rightarrow n}$ la fonction définie par l'action $\sigma \mapsto (i, n) \circ \sigma \circ (i, n)$, alors $\iota \circ f_i$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i}$ dans \mathfrak{S}_{n-1} et elle vérifie pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} : \nu((\iota \circ f_i)(\sigma)) = \nu(\sigma) - 1$. De plus, pour $i \neq j$, la fonction $g_{i,j} : \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i}$ définie par l'action $\sigma \mapsto (j, i) \circ \sigma$ est une bijection qui vérifie pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}$, $\nu(g_{i,j}(\sigma)) = \nu(\sigma) + 1$, ce qui conclut la démonstration. \square

On a alors la proposition suivante.

Proposition A.3. *Si les deux positions (i, j) et (p, l) ne sont pas de type **ML**, on a pour toute application $f : E \times \mathbb{N} \rightarrow F$ et tout $x \in E$:*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}} f(x, \nu(\sigma)) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-2}} f(x, \nu(\sigma) + 2) & \mathbf{2D} \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-2}} f(x, \nu(\sigma) + 1) & \mathbf{S} \text{ ou } \mathbf{1D} \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-2}} f(x, \nu(\sigma)) & \mathbf{2HD} \text{ et not } \mathbf{S} \end{cases} .$$

Démonstration. Examinons les trois cas de l'énoncé séparément.

Si **2D**, on note $f_{i,p} : \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow p} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{n-1 \rightarrow n-1} \cap \mathfrak{S}_n^{n \rightarrow n}$ la fonction définie par l'action $\sigma \mapsto (i, n) \circ (p, n-1) \circ \sigma \circ (p, n-1) \circ (i, n)$ et ι' l'inclusion naturelle de $\mathfrak{S}_n^{n-1 \rightarrow n-1} \cap \mathfrak{S}_n^{n \rightarrow n}$ dans \mathfrak{S}_{n-2} . On a alors que $\iota' \circ f_{i,p}$ réalise une bijection de $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow p}$ dans \mathfrak{S}_{n-2} et que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow p}$, $\nu((\iota' \circ f_{i,p})(\sigma)) = \nu(\sigma) - 2$.

Si **S**, alors la fonction $h_{i,j} : \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{j \rightarrow i} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow p}$ définie par $\sigma \mapsto (i, j) \circ \sigma$ est une bijection et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{j \rightarrow i}$, on a $\nu(h_{i,j}(\sigma)) = \nu(\sigma) + 1$. Concernant le cas **1D**, alors la fonction $g_{(i,j)(p,l)} : \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow i} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow p}$ telle que $\sigma \mapsto (j, i) \circ (l, p) \circ \sigma$ est une bijection et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}$ on a à nouveau $\nu(g_{(i,j)(p,l)}(\sigma)) = \nu(\sigma) + 1$.

Enfin dans le dernier cas **2HD** et not **S**, on a que $g_{(i,j)(p,l)}$ est encore une bijection mais cette fois-ci pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}$ on vérifie facilement que $\nu(g_{(i,j)(p,l)}(\sigma)) = \nu(\sigma) + 2$. \square

Remarque A.4. Si (i, j) et (p, l) sont de type **ML**, alors $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l} = \emptyset$ et donc

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j} \cap \mathfrak{S}_n^{p \rightarrow l}} f(x, \nu(\sigma)) = 0.$$

Définition A.5. Soit $n \geq 1$, on note $D_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i \in [n], \sigma(i) \neq i\} \subset \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des dérangements de \mathfrak{S}_n .

Définition A.6. Soit $n \geq 1$. On note pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $(i_1, \dots, i_k) \in [n]^k$, $Fix_n(i_1, \dots, i_k)$ le sous-ensemble de \mathfrak{S}_n dont les éléments (i_1, \dots, i_k) sont fixés mais pas les autres.

Remarque A.7. $Fix_n(\emptyset) = D_n$

Lemme A.8.

$$\mathfrak{S}_n = \{id\} \bigsqcup Fix_n(\emptyset) \bigsqcup_{i \in [n]} Fix_n(i) \bigsqcup \dots \bigsqcup_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{n-1}} Fix_n(i_1, \dots, i_{n-1})$$

Démonstration. Par définition, les intersections sont disjointes et cette union contient toutes les permutations. \square

Lemme A.9. $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall (i_1, \dots, i_k) \in [n-1]^k$, $Fix_n(i_1, \dots, i_k)$ équipotent à $Fix_n(1, \dots, k)$

Démonstration. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}, (i_1, \dots, i_k) \in [n-1]^k$.

On pose $\varphi_{(i_1, \dots, i_k)} : \sigma \in Fix_n(i_1, \dots, i_k) \mapsto (i_1 \ 1) \circ \dots \circ (i_k \ k) \circ \sigma \circ (i_1 \ 1) \circ \dots \circ (i_k \ k) \in Fix_n(1, \dots, k)$. $\varphi_{(i_1, \dots, i_k)}$ est bien définie et bijective. \square

Lemme A.10. $Fix_n(1, \dots, k)$ équipotent à D_{n-k} et une permutation $\sigma \in Fix_n(1, \dots, k)$ est associée à une unique permutation $\sigma' \in D_{n-k}$ possédant $\nu(\sigma) - k$ cycles.

Démonstration. On note $\varphi : Fix_n(1, \dots, k) \rightarrow D_{n-k}$ telle que

$$\forall \sigma \in Fix_n(1, \dots, k), \forall i \in [k-1], \varphi(\sigma)(i) = \sigma_{|(k+1, \dots, n)}(i+k)$$

Et $\psi : D_{n-k} \rightarrow \text{Fix}_n(1, \dots, k)$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in D_{n-k}, \forall i \in [k-1], \psi(\sigma)(i) &= i \\ \forall i \in \{k+1, \dots, n\}, \psi(\sigma)(i) &= \sigma(i-k) \end{aligned}$$

φ et ψ sont clairement bien définies et $\varphi \circ \psi = id_{\text{Fix}_n(1, \dots, k)}$ et $\psi \circ \varphi = id_{D_{n-k}}$ donc D_{n-k} et $\text{Fix}_n(1, \dots, k)$ sont équipotents. De plus par définition de φ , on a bien que pour $\sigma \in \text{Fix}_n(1, \dots, k)$, $\varphi(\sigma)$ possède $\nu(\sigma) - k$ cycle. \square

Lemme A.11. On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$, $T(n, k) = \#\{\sigma \in D_n \mid \nu(\sigma) = k\}$. Alors,

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} |s(n-i, k-i)|$$

Démonstration. On procède par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ sur le prédicat défini par

$$\mathcal{P}(n) = "\forall k \in \{0, \dots, n\}, T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} |s(n-i, k-i)"$$

$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évident en effet $T(0, 0) = 1 = |s(0, 0)|$, $T(1, 0) = 0 = |s(1, 0)|$, $T(1, 1) = 0 = |s(1, 1) - |s(0, 0)|$.

Fixons désormais $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Tout d'abord, $T(n+1, n+1) = 0 = (1-1)^{n+1} + 1 = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} |s(n+1-i, n+1-i)|$ (pour tout entier p , la seule permutation de $\{1, \dots, p\}$ avec p cycles dans sa décomposition est l'identité) et $T(n+1, 0) = 0 = |s(n, 0)|$ (une permutation a au moins un cycle dans sa décomposition).

Maintenant soit $k \in [n]$, pour $\sigma \in \{\sigma \in D_{n+1} \mid \nu(\sigma) = k\}$, et c le cycle de la décomposition d'un tel σ dont le support contient $(n+1)$.

Un tel dérangement σ peut être caractérisé de deux façons différentes :

Si c est de la forme $c = (p, n+1)$, $p \in \{1, \dots, n\}$, un 2-cycle alors un tel dérangement σ est la composée de $k-1$ cycles formant la décomposition d'un dérangement d'un ensemble à $n-1$ éléments ($T(n-1, k-1)$ choix) et de c (il y a n possibilités pour p donc pour c) donc jusqu'ici $nT(n-1, k-1)$ dérangements possibles.

Sinon on a c de la forme $c = (a_1 a_2 a_p, n+1)$, $p \in \{2, \dots, n\}$, et σ peut être entièrement déterminée par le choix d'un dérangement de $[n]$ dont la décomposition est formée de k cycles ($T(n, k)$ choix), on en choisit un (k possibilités), et on transforme ce cycle qui est de la forme $(a_1 a_2 \dots a_p)$, $p \in [n]$ en $(a_1 a_2 \dots a_p (n+1))$, puis on remplace l'ancien cycle par le nouveau dans l'ancienne décomposition en cycles à supports disjoints pour obtenir un tel dérangement σ , il y a donc $kT(n, k)$ possibilités. On obtiens alors la relation $T(n+1, k) = nT(n-1, k-1) + kT(n, k)$. Par hypothèse de récurrence double on a :

$$nT(n-1, k-1) = n \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} |s(n-1-i, k-1-i)| = - \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{n}{i} |s(n-i, k-i)|$$

Donc

$$kT(n, k) + nT(n-1, k-1) = k|s(n, k)| + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{n}{i} (k-i) |s(n-i, k-i)|$$

On utilise alors le résultat bien connu $\forall n, k \geq 1, |s(n, k)| = k|s(n-1, k)| + |s(n-1, k-1)|$ que l'on démontre avec un raisonnement analogue au précédent ($k|s(n-1, k)|$ partitions qui sans le singleton n et $|s(n-1, k-1)|$ partitions qui contiennent le singleton n), on a alors :

$$\begin{aligned}
T(n+1, k) - k|s(n, k)| &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{n}{i} (k-i) |s(n-i, k-i)| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{n}{i} |s(n+1-i, k-i)| + \sum_{i=2}^k (-1)^i \binom{n}{i-1} |s(n+1-i, k-i)| \\
&= \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} |s(n+1-i, k-i)| - n|s(n, k-1)| + (-1)^k \binom{n}{k-1} |s(n+1-k, 0)| \\
&= \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (|s(n+1-i, k-i)|) - n|s(n, k-1)|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
T(n+1, k) &= k|s(n, k)| - n|s(n, k-1)| + \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} |s(n+1-i, k-i)| \\
&= -(n+1)|s(n, k-1) + s(n+1, k)| + \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^i \binom{n+1}{i} |s(n+1-i, k-i)| \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{i} |s(n+1-i, k-i)| = T(n+1, k)
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration.

□

Acronymes

A

$\det_\alpha(M)$ α -determinante de la matrice M
 $\text{perm}_\alpha(M)$ α -permanente de la matrice M

E

$[n]$ ensemble des entiers de 1 à n
 D_n ensemble des dérangements de \mathfrak{S}_n
 $\text{Fix}_n(i_1, \dots, i_k)$ ensemble des permutations dans \mathfrak{S}_n qui fixent exactement i_1, \dots, i_k
 $\mathfrak{S}_n^{i \rightarrow j}$ ensemble des permutations dans \mathfrak{S}_n qui envoient i sur j
 \mathfrak{S}_n ensemble des permutations de $[n]$, groupe symétrique d'ordre n
 $\mathcal{P}_{[n]}$ ensemble des partitions de l'ensemble $[n]$

F

$(X)_n$ factorielle décroissante de l'indeterminée X , $n \in \mathbb{N}$
 $(X)^n$ factorielle croissante de l'indeterminée X , $n \in \mathbb{N}$

M

$E_{i,j}$ matrice de taille n qui contient un 1 en position (i, j) et des 0 partout ailleurs
 I_n matrice identité de taille n
 J_n matrice avec que des 1 de taille n

N

$B(n)$ nombre de bell, nombre de partitions d'un ensemble à n éléments
 $\nu(\sigma)$ nombre de cycles d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$
 $\nu(\pi)$ nombre de parties d'une partition $\pi \in \mathcal{P}_n$
 $s(n, k)$ nombre de stirling de première espèce
 $S(n, k)$ nombre de stirling de seconde espèce

Y

Y_P zéros de Yang-Lee avec P l'ensemble des positions perturbées
 $YL(M)$ zéros de Yang-Lee de la matrice M

Références

- [Bar20] Alexander Barvinok. A remark on approximating permanents of positive definite matrices, 2020.
- [CMO19] Fabio Deelan Cunden, Satya N Majumdar, and Neil O’Connell. Free fermions and α -determinantal processes. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 52(16) :165202, 2019.
- [Cra13] Harry Crane. Some algebraic identities for the α -permanent. *Linear Algebra and Its Applications*, 439(11) :3445–3459, 2013.
- [DH97] A.C. Davison and D.V. Hinkley. *Bootstrap Methods and Their Application*. Bootstrap Methods and Their Application. Cambridge University Press, 1997.
- [Dus18] Pierre Dusart. Cours de statistiques inférentielles, 2018. Licence 2-S4 SI-MASS, Année 2018.
- [FGN01] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Exercices de mathématiques des oraux de l’Ecole polytechnique et des Ecoles normales supérieures : Algèbre*. Enseignement des mathématiques. Cassini, 2001.
- [J.L16] Jensen J.L.V.W. An elementary exposition of the theory of the Gamma function. *Ann. of Math., 2e série*, 17 :124–126, 1916.
- [LY52] Tsung-Dao Lee and Chen-Ning Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Physical Review*, 87(3) :410, 1952.
- [Mac15] Percy Alexander MacMahon. Combinatory analysis. *Cambridge University Press*, 1, 1915.
- [Tui18] Michael P Tuite. Some Generalizations of the MacMahon Master Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Serie A*, 2018.
- [Ver24] Sébastien Verel. Notion de complexité, 2023–2024. Informatique Théorique 2, Licence 3 Informatique.
- [VJ88] David Vere-Jones. A generalization of permanents and determinants. *Linear Algebra and Its Applications*, 111 :119–124, 1988.