



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

DIPARTIMENTO DI FISICA

ELABORATO FINALE

**La Teoria di Schwarz-Christoffel e
il Biliardo Quantistico Poligonale**

PACS: 02.30.Jr 03.65.-w

Relatore:
Prof. Luca Guido
MOLINARI

Candidato:
758100 Matteo
D'ACHILLE

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1	L'espansione di Weyl	5
2	Alcune Proprietà Generali delle Soluzioni	9
2.1	Il caso triangolare, quadrato e circolare	10
2.1.1	Caso Triangolare	11
2.1.2	Caso Rettangolare	12
2.1.3	Caso Circolare	16
2.2	Mapping del problema	17
3	Lo sviluppo perturbativo	19
3.1	Brevi richiami di Teoria Perturbativa	19
3.2	Una teoria perturbativa differente	21
3.2.1	Ordine Zero	22
3.2.2	Primo Ordine	22
3.2.3	Secondo Ordine	23
3.2.4	Risultati numerici	24
A	Proprietà delle mappe conformi	27
A.1	La trasformazione di Schwarz-Christoffel	31
A.1.1	Un esempio: il caso triangolare.	33
B	Le funzioni di Bessel	37

Premessa

Il seguente elaborato intende essere uno studio delle proprietà di un sistema bidimensionale talvolta chiamato “biliardo quantistico” (quale una particella vincolata all’interno di una regione bidimensionale) per mezzo dell’equazione di Schroedinger indipendente dal tempo; in particolare ci si restringerà al caso in cui il dominio sia l’interno di un poligono regolare convesso la cui frontiera sia composta da pareti infinitamente alte (fatto che impone alla funzione d’onda le condizioni al contorno di Dirichlet).

Dopo una prima parte di inquadramento del problema nella quale saranno esposti alcuni risultati riguardanti il legame tra il dominio di definizione e le proprietà spettrali dell’operatore di Laplace (culminante con un riferimento all’espansione di Weyl), si richiameranno alcune proprietà generali delle soluzioni necessarie per sviluppare una teoria perturbativa; verrà quindi fornito un riepilogo in chiave storica dei tre casi analiticamente risolubili (ci si riferisce ai casi triangolare equilatero, quadrangolare e circolare, che peraltro sono anche le sole regioni poligonali per cui il corrispondente problema classico è integrabile) dopo il quale sarà proposta una teoria perturbativa conforme fondata sulla tecnica delle trasformazioni di Schwarz-Christoffel, mutuata dall’Analisi Complessa. Dopo una discussione dei risultati numerici ottenuti con il metodo perturbativo suddetto saranno proposte due appendici, una prima incentrata sul Teorema di Riemann e sulle proprietà delle Mappe Conformi, e una seconda dal carattere più storico-compilativo riguardante invece la teoria delle funzioni di Bessel.

Capitolo 1

L'espansione di Weyl

Non è inconsueto in Fisica (in particolare nell'Elettromagnetismo e nella Meccanica Quantistica) arrivare ad equazioni del tipo

$$(\Delta + K)\varphi = 0 \tag{1.1}$$

ove la funzione φ , dipendente dalle sole coordinate, assume a seconda dei casi il significato di ampiezza di probabilità piuttosto che ampiezza d'onda elettromagnetica; in questi ambiti, al di là delle difficoltà correlate alla risoluzione analitica di tale problema (spesso ottenuta per mezzo delle funzioni di Green) riveste un ruolo centrale non tanto l'interpretazione fisica delle diverse condizioni al contorno (in questo elaborato ci si focalizzerà sul caso di Dirichlet), quanto la ricerca di un legame tra la geometria del dominio di definizione e le proprietà spettrali degli autovalori.

A questo filone è senz'altro ascrivibile il celebre articolo di *M.Kač* [12], nel quale ci si chiede se sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra la forma di una membrana acustica e le frequenze proprie che questa è in grado di emettere (“*Can one hear the shape of a drum?*” [cit.]); del resto, come già emerso in un lavoro del 1964 dovuto a J.Milnor ([16]), era chiaro come la sequenza degli autovalori dell'operatore di Laplace non determinasse completamente la varietà su cui questo è definito (il viceversa, a meno di difficoltà legate alla risoluzione dell'equazione agli autovalori, è ovvio).

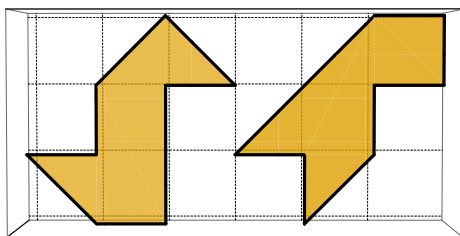


Figura 1.1: Le due regioni isospettrali dell'articolo [9], le quali risultano evidentemente equiestese ed isoperimetriche.

Sebbene la risposta senza ulteriori precisazioni a questo quesito nel caso dei domini bidimensionali sia arrivata soltanto nel 1994 (ci si riferisce all'articolo [9], nel quale viene mostrato come membrane non convesse composte da due differenti arrangiamenti di 7 triangoli rettangoli isosceli diano luogo allo stesso spettro), risultò naturale domandarsi quando fosse possibile reperire delle informazioni definitorie da altre caratteristiche dello spettro, quali le sue proprietà statistiche o asintotiche.

Alcuni risultati erano già stati ottenuti nella teoria della propagazione della radiazione elettromagnetica in una cavità (spesso chiamato "problema di corpo nero"); in questo contesto in un articolo del 1911 [22] Hermann Weyl aveva mostrato che la densità degli autostati doveva avere la forma

$$d(E) = \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} V \mp \frac{\pi}{2} \frac{m}{\hbar^2} S \quad (1.2)$$

dove il segno \mp si riferisce alle condizioni al contorno di Dirichlet piuttosto che di Neumann, mentre V ed S sono il volume e la superficie della cavità. Si noti che l'espansione di Weyl trasforma la questione in un problema di tipo isovolumetrico e pertanto non è sufficiente a dare una risposta univoca al quesito di *Kač* (a questo proposito si veda la figura 1.1). Nel caso dei biliardi (ossia di cavità bidimensionali), che costituiscono il fulcro del presente elaborato, si è assistito ad un progressivo raffinamento delle correzioni asintotiche alla relazione (1.2), la più elegante delle quali è reperibile in [20] ed è orientata allo studio di regioni poligonali delimitate da bordi regolari a tratti

$$\rho(E) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar}\right) A - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\left(\frac{2m}{\hbar}\right)} \frac{L}{\sqrt{E}} + \left[\frac{1}{12\pi} \oint k(s) ds + \sum_i \frac{\pi^2 - \alpha_i^2}{24\pi\alpha_i} \right] \delta(E) \quad (1.3)$$

dove A è la superficie del poligono, L il suo perimetro, $\frac{1}{12\pi} \oint k(s) ds$ una curvatura media (che nel caso dei poligoni si annulla) ed α_i gli angoli interni relativi all' i -esimo vertice (qualora esista). Una discussione sull'origine fisica dei termini di perimetro e di curvatura assieme ad altre considerazioni di tipo semiclassico sul biliardo quantistico e sulle cavità può essere reperita in [4]; per quanto riguarda il termine di superficie è immediato osservare che, nel caso di un biliardo avente per bordo una poligono regolare iscritto nella circonferenza unitaria, una volta definita la funzione "enumeratrice" degli autostati $N(E) = \#\{\text{stati con energia} < E\}$ e la densità degli autostati

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \quad (1.4)$$

è possibile quantizzare lo spazio della fasi in elementi di volume $(2\pi\hbar)^2$, ciascuno occupato da un solo stato (approssimazione di Thomas-Fermi) e pertanto calcolare il valore di aspettazione di $N(E)$ sostituendo la sommatoria con un'integrazione su tutto lo spazio delle fasi

$$[N(E)] \simeq \int \frac{d^2p d^2q}{(2\pi\hbar)^2} \Theta\left(E - \frac{p^2}{2m} - V(q)\right) = \frac{A}{(2\pi\hbar)^2} \int_{p^2 < 2mE} d^2p = \frac{A(n)}{4\pi} \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (1.5)$$

La relazione della geometria euclidea $A(n) = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

porta in definitiva alla scrittura

$$N(E) = \frac{\pi m E}{h^2} n \sin \frac{2\pi}{n} \simeq \frac{2mE\pi^2}{h^2} \left(1 - \frac{1}{9\pi^2 n^2}\right) + O(n^{-4}) \quad (1.6)$$

che in linea di principio permette di determinare il numero di lati di un tamburo di forma poligonale regolare “ascoltandone lo spettro”, cioè contando il numero di differenti toni puri che esso è in grado di emettere al crescere dell’energia.

Capitolo 2

Alcune Proprietà Generali delle Soluzioni

Il presente paragrafo, oltre a costituire il riferimento per le notazioni utilizzate in seguito, intende essere un'esposizione delle proprietà delle soluzioni dell'equazione di Helmholtz (cioè dell'equazione di Schroedinger per il biliardo quantistico) essenziali per lo sviluppo di un modello perturbativo.

Sia D un dominio (per dominio si intenderà d'ora in poi un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^2) e sia $\Gamma \equiv \partial D$ la sua frontiera. Il problema agli autovalori per una particella vincolata a muoversi in D assume nella rappresentazione di Schroedinger delle coordinate la forma

$$\Delta\psi_n(x, y) = -\frac{2mE_n}{\hbar^2}\psi(x, y) \quad (2.1)$$

$$\psi(x(\tau), y(\tau)) = 0 \quad (2.2)$$

ove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è l'operatore di Laplace in due dimensioni e $\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ una qualche parametrizzazione surgettiva della curva Γ che sia almeno regolare a tratti; per quanto riguarda le proprietà di regolarità delle autofunzioni si richiede che queste siano continue ed almeno di classe C^2 su D , poiché la richiesta di continuità sul compatto garantisce la normalizzabilità delle ψ_n mentre il vincolo di annullamento sul bordo, utilizzato all'interno della catena di uguaglianze

$$\iint_D \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial y} \right)^2 dx dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_n \frac{\partial\psi_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi_n \frac{\partial\psi_n}{\partial y} \right) dx dy + \quad (2.3)$$

$$- \iint_D \psi_n \Delta\psi_n dx dy = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \iint_D \psi_n^2 dx dy \quad (2.4)$$

assicura la positiva definizione del generico livello energetico (ma questa conclusione è valida anche nel caso più generale delle condizioni al contorno di Neumann). Un argomento del tutto simile al precedente, comunque valido indipendentemente dalla forma specifica del dominio D , porta alla seguente relazione di *ortogonalità*

$$(E_n - E_m) \int_D \psi_n \psi_m dx dy = - \int_D (\psi_n \Delta \psi_m - \psi_m \Delta \psi_n) dx dy = 0 \quad (2.5)$$

Infine è possibile mostrare che l'insieme delle autofunzioni di questo problema agli autovalori costituisce un set completo (si veda ad esempio [7]), garantendo in questa maniera la realizzabilità di una teoria perturbativa.

Spesso in questa categoria di problemi (soprattutto in previsione di una trasformazione conforme del dominio D) può essere utile passare a coordinate complesse $z = x + iy$; il Laplaciano assume la forma $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ mentre l'equazione di Schroedinger diviene

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \psi_n(z, \bar{z}) = - \frac{mE_n}{2\hbar^2} \psi(z, \bar{z}) \quad (2.6)$$

fermo restando che le condizioni al contorno vengano implementate parametrizzando in maniera opportuna il bordo del dominio sul piano di Gauss. La descrizione complessa del problema, come mostrato in un lemma in [3] e richiamato in [17], ha anche il vantaggio di rendere evidenti alcune particolari proprietà di simmetria della soluzione all'equazione (2.2) qualora questa si possa scrivere in termini della somma finita

$$\psi_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^m c_k e^{\frac{1}{2}(\gamma_{k,n} \bar{z} - \bar{\gamma}_{k,n} z)} \quad (2.7)$$

ove $|\gamma_{k,n}| = -\frac{mE_n}{2\hbar^2}$ con $k = 1, \dots, m$, e di fatti qualora ψ_n ammetta delle linee nodali risulta antisimmetrica se valutata in punti simmetrici rispetto ad una retta contenente tali linee (in particolare l'antisimmetria assicura che la funzione d'onda si annulli su tutto l'asse). Questa notevole proprietà, conseguenza del solo ansatz (2.7) e dell'indipendenza lineare di $e^{i\beta}$ e $e^{i\alpha}$, con $\alpha \neq \beta$, implica che nel caso in cui la funzione (2.7) ammetta più linee nodali non parallele il loro angolo di intersezione sia un sottomultiplo di π , risultato che, specializzato al caso dei bordi (secondo lo stesso schema proposto in (A.10)), porta all'equazione Diofantea

$$\sum_{k=1}^{\Omega} \frac{\pi}{n_k} = \pi(\Omega - 2) \quad \Omega \leq 3 \quad (2.8)$$

con Ω il numero di lati del poligono. Dovendo essere $\Omega = 3, 4$ si può concludere che la soluzione del problema poligonale può essere espansa in somma finita di onde piane *soltanto nel caso del triangolo e del quadrato* (o di geometrie derivate, ad esempio mezzo triangolo equilatero, mezzo quadrato).

2.1 Il caso triangolare, quadrato e circolare

Lo studio dell'equazione di Schroedinger nel caso di una particella vincolata a muoversi all'interno di un poligono convesso è matematicamente equivalente alla risoluzione dell'equazione di Helmholtz: tale equazione venne studiata ben prima dell'avvento della Meccanica Quantistica e all'interno della famiglia di problemi ad essa generalmente connessi se ne riscontrano alcuni di veramente

premonitori (lo studio delle frequenze di oscillazione libera di una membrana di forma arbitraria, ad esempio); per tale ragione in questo paragrafo verranno richiamate le soluzioni di (1.1) da un punto di vista classico e ove necessario sarà sottolineata l'analogia (non solo formale) con le proprietà delle soluzioni dell'equazione nel caso quantistico.

Il punto di partenza per lo studio delle vibrazioni trasversali di una membrana, ovvero di una lamina sottilissima sottoposta alla sola azione della tensione, è l'equazione d'onda o *d'Alembert* per la funzione $u = u(x, y, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad (2.9)$$

dove $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, con T_0 la tensione (supposta uniforme) e ρ la densità superficiale della membrana. Assieme all'equazione differenziale occorre tener conto delle condizioni al contorno cui deve soddisfare la funzione u sul bordo ∂C del dominio C : nel nostro caso $u|_{\partial C} = 0$. In questa classe di problemi, qualora si sia interessati all'evoluzione temporale della membrana, è necessario specificare anche le *condizioni iniziali*; essendo l'equazione di d'Alembert del secondo ordine nel tempo è sufficiente a questo scopo fornire le due funzioni

$$u|_{t=0} = \phi_1(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \phi_2(x, y) \quad (2.10)$$

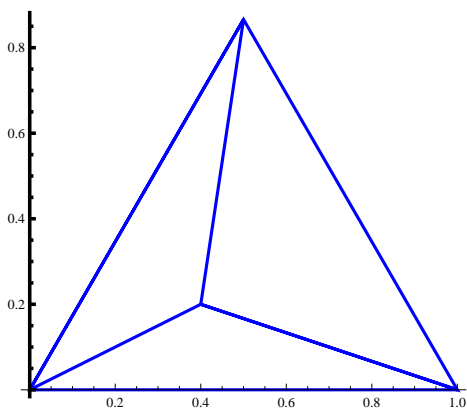
chiamate rispettivamente lo spostamento e la velocità di tutti i punti della membrana nell'istante iniziale; ad ogni modo nella presente esposizione, come già anticipato in precedenza, ci si limiterà alla disamina del caso stazionario.

2.1.1 Caso Triangolare

G. Lamé affrontò il problema del caso triangolare in un primo momento nel contesto della teoria della propagazione del calore in un prisma a base triangolare equilatera [13]; tuttavia è nel lavoro sulla teoria dell'elasticità [14] che egli fornisce la soluzione del problema (a meno della completezza).

Il ragionamento di Lamé è basato sulla proprietà caratterizzante del triangolo equilatero di essere il *luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai tre lati è uguale a una costante (ovvero la sua altezza)*, risultato della Geometria Euclidea noto come Teorema di Viviani

(l'asserto segue immediatamente dalla richiesta che la somma delle aree delle tre regioni individuate da un qualunque punto interno e dai segmenti che lo congiungono ai vertici - come in figura- sia uguale all'area del triangolo equilatero). Per un triangolo equilatero di lato A -collocato nel primo quadrante come in figura- è naturale assumere questa tre quantità come coordinate ausiliarie via la trasformazione



$$\begin{cases} u = \frac{2\pi}{A}y \\ v = \frac{2\pi}{A}\left(-\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ w = \frac{2\pi}{A}\left(-\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{cases}$$

che, oltre a semplificare notevolmente le condizioni al contorno (la funzione U dovrà annullarsi sugli assi coordinati u, v, w), permette di sfruttare le proprietà di simmetria del triangolo equilatero per costruire le soluzioni a simmetria C_{3v} (cioè invarianti sotto l'azione di uno dei diversi operatori di proiezione relativi alle tre rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_3). La soluzione completa e alcune proprietà algebriche delle soluzioni sono reperibili in [5]; l'osservazione fondamentale è riferita invece al problema della degenerazione del generico livello energetico

$$\omega_{ij} = \frac{k}{2mA^2} (i^2 + j^2 + ij) \quad (2.11)$$

Purtroppo non è possibile fornire il numero di diverse coppie i, j aventi la stessa immagine mediante la precedente forma quadratica; comunque è evidente che esiste una degenerazione non banale (ad esempio: la coppia $(7,0)$ e $(5,3)$).

Rifacendosi al problema quantistico è possibile utilizzare un semplice argomento per garantire la degenerazione del generico livello energetico (ossia delle frequenze “pure” della membrana triangolare): l'hamiltoniana $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, assieme alle condizioni al contorno assegnate, presenta tutte le simmetrie del triangolo equilatero e quindi commuta con le rotazioni di angoli multipli di $\frac{2\pi}{3}$ e con le tre riflessioni; queste trasformazioni (e dunque gli operatori che le rappresentano nello spazio di Hilbert degli stati) non commutano tutte tra loro (il gruppo delle isometrie del triangolo equilatero non è abeliano): così il “Teorema di Degenerazione” (nella versione reperibile in [18], 7.2) garantisce l'esistenza di livelli energetici degeneri.

2.1.2 Caso Rettangolare

Si supponga senza perdere di generalità che la membrana in esame giaccia nel primo quadrante e che il suo contorno sia un rettangolo di lati

$$x = 0, \quad x = l, \quad y = 0, \quad y = m \quad (2.12)$$

Si sta ricercando una soluzione particolare dell'equazione (2.9) nella forma fattorizzata

$$u(x, y, t) = (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) U(x, y) \quad (2.13)$$

Allora è chiaro che ponendo

$$\omega^2 = a^2 k^2 \quad (2.14)$$

U deve soddisfare un'equazione di tipo (2.2). Considerazioni di simmetria sulla natura del dominio suggeriscono di tentare una ulteriore fattorizzazione, ossia $U(x, y) = X(x)Y(y)$. Semplici passaggi algebrici mostrano che le funzioni X e

Y descrivono un'oscillazione armonica lineare di frequenza rispettivamente λ e μ , ove $\mu^2 + \lambda^2 = k^2$; a questo punto la condizione al contorno, oltre a restringere la soluzione ad avere profilo sinusoidale per via dei vincoli $U(0, y) = U(l, y) = U(x, 0) = U(x, m) = 0$, implica la regola di quantizzazione

$$U(x, y) = \sin \lambda_\sigma x \sin \mu_b y \quad \lambda_a = \frac{a\pi}{l}, \quad \mu_b = \frac{b\pi}{m}, \quad (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (2.15)$$

e dalla (2.14) segue il valore della generica frequenza di oscillazione

$$\omega_{ab}^2 = a^2 \pi^2 \left(\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} \right) \quad (2.16)$$

In definitiva si è in grado di fornire un'infinità di vibrazioni armoniche proprie della membrana dipendenti da due "autovalori"

$$u_{ab}(x, y, t) = (\alpha_{ab} \cos \omega_{ab} t + \beta_{ab} \sin \omega_{ab} t) \sin \frac{a\pi x}{l} \sin \frac{b\pi y}{m} \quad (2.17)$$

e chiaramente la soluzione generale sarà la serie doppia su tutti i valori di a e b di siffatte funzioni.

Oltre alle analogie con il problema della quantizzazione della particella in una scatola, il caso della membrana rettangolare differisce da quello della vibrazione di una corda (del quale costituisce l'immediata estensione) per il fatto che, per quest'ultima, a ogni frequenza propria corrisponde una e una sola "forma d'onda", la quale risulta suddivisa dai cosiddetti "nodi" in parti uguali, mentre per la membrana rettangolare è possibile ricondursi alle considerazioni del capitolo I. I ragionamenti seguenti sono generali (ossia non dipendono dalla particolare forma del dominio purché esso sia bidimensionale e chiuso), tuttavia si è scelto di inserirli in questo paragrafo per via della semplice forma fattorizzata della soluzione; infatti nel caso di interesse è evidente dalla (2.16) che alla stessa frequenza di vibrazione corrispondono più forme della membrana, le quali peraltro manifestano anche una diversa collocazione delle linee nodali.

Questa differenza sostanziale tra le soluzioni dell'equazione di d'Alembert nel caso monodimensionale e bidimensionale trova un immediato riscontro in *Mecchanica Quantistica* nei cosiddetti Teoremi "di Oscillazione" e "di non Degenerazione" (si veda [18], pp. 126-127); il primo di questi afferma che per un sistema quantistico con un solo grado di libertà, se E_0, E_1, \dots, E_n sono gli autovalori discreti dell'hamiltoniana ordinati in senso crescente e $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ le corrispondenti autofunzioni ψ_i ammettono i nodi (si pensi al caso della corda vibrante). Il "Teorema di Non Degenerazione" (conseguenza diretta dell'equazione di Schroedinger tempo-indipendente), invece, garantisce che in un sistema unidimensionale gli autovalori discreti della hamiltoniana siano non degeneri: di contro osserviamo che in contesti a più gradi di libertà (si ricordi ancora una volta il problema isospettrale) per discutere le degenerazioni è necessario utilizzare argomenti differenti da questo, quale ad esempio quello utilizzato nella sezione precedente (infatti anche il gruppo delle isometrie del rettangolo non è abeliano).

Per studiare il fenomeno della degenerazione nel caso della membrana rettangolare è utile riferirsi al caso di membrana quadrata $l = m = r$, poiché la frequenza è data dalla relazione

$$\omega_{ab} = \frac{a\pi}{r} \sqrt{a^2 + b^2} \equiv \gamma \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.18)$$

Pertanto nel caso del suono fondamentale $\omega_{11} = \sqrt{2}\alpha$ non esistono linee nodali all'interno della membrana (nell'analogo problema quantistico la particella può essere trovata in qualunque posizione del rettangolo, ovvero l'autofunzione ψ_0 è pari sul dominio); e tuttavia osserviamo che (oltre alla degenerazione dovuta alla scrittura di un intero come somma di due quadrati, che quando $a \neq b$ è uguale a due) ad una frequenza di oscillazione ω_{ij} corrisponde un'infinità numerabile di vibrazioni della membrana che si ottengono come combinazione lineare di U_{ij} e U_{ji} . In figura 2.1 sono mostrate a titolo di esempio le regioni di livello di alcune di queste combinazioni lineari note in acustica con il nome di figure di "Chladni", spesso utilizzate per una verifica sperimentale delle considerazioni sopra enunciate.

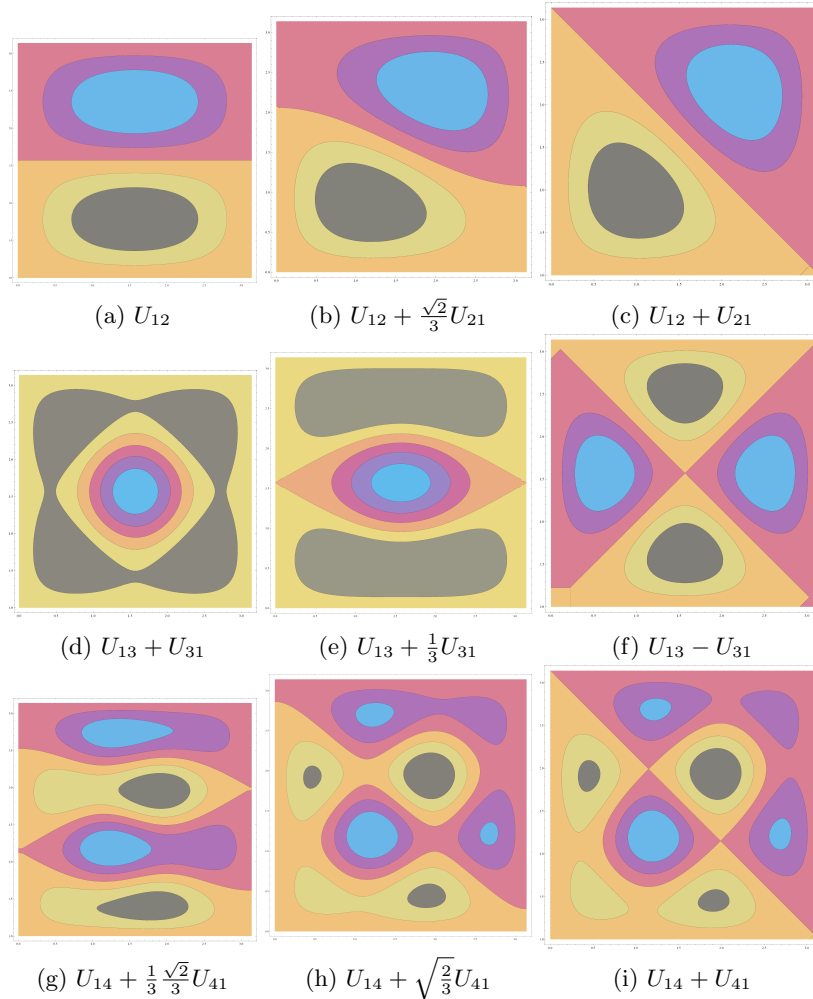


Figura 2.1: Alcune "Figure di Chladni" relative a semplici combinazioni lineari di funzioni $U_{ab} = \sin ax \sin by$; all'interno di ciascuna riga sono riportate forme d'onda relative alla stessa frequenza (dall'alto in basso, rispettivamente $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{17}$ Hz). Le linee nodali separano il rosso dall'arancione.

2.1.3 Caso Circolare

La risoluzione del problema nel caso di una membrana circolare è del tutto analoga al caso precedente, una volta che sia stata introdotta l'espressione per il Laplaciano in coordinate polari

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.19)$$

Ancora una volta la simmetria del problema suggerisce di tentare una soluzione dell'equazione (2.9) del tipo $U(r, \theta) = T(\theta)R(r)$; in questo modo l'equazione d'onda si disaccoppia per ottenere il sistema

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 T = 0 \\ R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) R = 0 \end{cases}$$

Le richieste fisiche del problema implicano che $T(\theta) = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta$ sia una funzione periodica di periodo 2π , il che è possibile solo per valori interi di λ . La seconda equazione non è altro che l'equazione differenziale di Bessel (risolta in appendice), che ammette la soluzione generale

$$R_\lambda(r) = k_1 J_\lambda(kr) + k_2 Y_\lambda(kr) \quad (2.20)$$

dove J_λ e Y_λ sono rispettivamente la prima e la seconda soluzione fondamentale dell'equazione di Bessel. Se si è interessati alle soluzioni fisiche del problema occorre richiedere $k_2 = 0$ ¹, ottenendo un'infinità di soluzioni dell'equazione originale nella forma ($\lambda = n$)

$$(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)(C \cos n\theta + D \sin n\theta)R_n(r) \quad (2.21)$$

Del resto se l è il raggio del cerchio la condizione limite $u|_{r=l} = 0$ implica che

$$J_n(kl) = 0 \quad (2.22)$$

Dalla teoria delle equazioni di Bessel è noto che questa equazione ammette un'infinità di radici positive: in definitiva le frequenze proprie di oscillazione della membrana sono date da

$$\omega_{m,n} = \frac{1}{l} \mu_m^n \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Infine è opportuno osservare che, come conseguenza della nota proprietà $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, tutti gli autostati sono due volte degeneri, fatta eccezione per quello di momento angolare nullo (si ricordi che n ha qui il significato di momento angolare espresso in multipli di \hbar).

Così come nel caso rettangolare risulta evidente l'analogia formale con la particella quantistica in una buca cilindrica l'oscillazione della membrana (ossia l'ampiezza di probabilità) è data dalla sovrapposizione dei modi propri e alla stessa frequenza corrisponde un'infinità numerabile di configurazioni delle linee nodali, che danno luogo ai corrispondenti pattern di Chladni.

¹per i dettagli si veda la relativa Appendice

2.2 Mapping del problema

é la scrittura stessa del problema in forma complessa (2.7) a suggerire che, nel caso di un dominio poligonale ambientato nel piano di Gauss e avente come vertici le radici n-esime dell'unità, si possa trasformare l'equazione di Helmholtz via una mappa del tipo (A.10) in

$$\frac{\partial^2 \psi_n(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{mE_n}{2\hbar^2} \left| \frac{\partial g(z)}{\partial z} \right|^2 \psi(z, \bar{z}) \equiv -\frac{\epsilon^2}{4} |g'(z)|^2 \psi(z, \bar{z}) \quad (2.24)$$

$$\psi(z, \bar{z}) = 0 \quad |z| = 1 \quad (2.25)$$

Si ricordi che i vertici sono in questo caso punti fissi della trasformazione; il modulo quadro del suo Jacobiano non è altro che la funzione generatrice dei polinomi ultrasferici o di Gegenbauer a meno di una normalizzazione (qui la sua restrizione all'asse reale):

$$|g'(x)|^2 = \frac{C_n}{(1 + 2xt - t^2)^{\frac{2}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{2}{n}}(x) t^k \quad (2.26)$$

Come facilmente verificabile questa serie formale di potenze converge assolutamente su tutto il disco unitario: tali polinomi di grado k sono ortogonali su $[-1, 1]$ e soddisfano alle usuali regole di ricorsione (ad esempio [2], pp.773, 22.1.4).

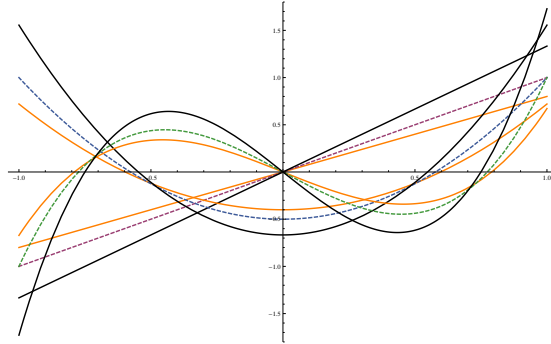


Figura 2.2: Grafico di alcuni polinomi di Gegenbauer $C_i^j(x)$, $i = 1, \dots, 3$, normalizzati sull'intervallo $[-1, 1]$. nel caso del triangolo ($j = \frac{2}{3}$, tratto nero), per il quadrato ($j = \frac{1}{2}$, linea tratteggiata) e per il pentagono ($j = \frac{2}{5}$, tratto arancione)

Per procedere nella discussione del problema è necessario esplicitare la trasformazione di Schwarz-Christoffel (A.10) mediante una semplice integrazione (si ricordi che sul disco unitario vale $(1-z)^\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)_i}{i!} z^i$)

$$g_n(z) = C_n \int_0^z ds \frac{1}{(1-s^n)^{\frac{2}{n}}} = C_n \int_0^z ds \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2}{n}_k}{k!} s^{nk} = C_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2}{n}_k}{k!} \int_0^z ds s^{nk} \quad (2.27)$$

$$= C_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2}{n}_k}{k!(nk+1)} z^{nk+1} \quad (2.28)$$

$$= C_n z {}_2F_1 \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; z^n \right) \quad (2.29)$$

ove

$${}_2F_1 \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; z^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2}{n}_k \binom{1}{n}_k}{\binom{n+1}{n}_k k!} z^{nk} \quad (2.30)$$

è la Funzione Ipergeometrica di Gauss e $(\alpha)_n$ è il simbolo di *Pochhammer* (o “fattoriale crescente”), definito per $n \in \mathbb{N}$ naturale da

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1) & n > 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Inserendo in (2.24) le precedenti espressioni e passando ad unità naturali si ottiene

$$\left[4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + (C_n \epsilon_n)^2 |1 + \eta g'_n(z)|^2 \right] \psi(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.32)$$

dove

$$g'_n(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n}+1)}{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})} \sum_{k=1}^{\infty} n \frac{\Gamma(\frac{2}{n}+k)}{\Gamma(k-1)} z^{nk} \quad (2.33)$$

Considerando la forma dell'equazione (2.32) si possono fare le seguenti considerazioni:

- La successione di trasformazioni di Schwarz-Christoffel (2.7) converge all'identità per $n \rightarrow \infty$, indicando che si può assumere la soluzione del disco come caso limite in un qualche parametro perturbativo;
- Siccome questo caso è noto in letteratura il caso (diciamo $\eta = 0$) è naturale ricercare una soluzione approssimata di tale problema agli autovalori in termini di uno sviluppo perturbativo per poi ritornare indietro al poligono mediante una trasformazione inversa: riprendendo l'idea in [17], si utilizzerà il parametro $\frac{1}{n}$ (in realtà un suo riarrangiamento).

Proprio questa seconda osservazione sarà il punto di partenza per il prossimo capitolo.

Capitolo 3

Lo sviluppo perturbativo

3.1 Brevi richiami di Teoria Perturbativa

Il presente paragrafo intende essere un richiamo di teoria perturbativa ordinaria indipendente dal tempo mediante la quale fissare le notazioni, pur introducendo le problematiche connesse all'applicazione di tale teoria al caso (2.32).

Si consideri un sistema quantistico S descritto dall'hamiltoniana H e avente spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H} ; per esso sia nota la soluzione dell'equazione di Schroedinger

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (3.1)$$

in cui gli autovettori $|E_n\rangle$, ciascuno relativo al proprio autovalore E_n , soddisfino le usuali relazioni di completezza e ortogonalità

$$\begin{cases} \sum_k |E_k\rangle\langle E_k| = \mathbf{1} \\ \langle E_i|E_j\rangle = \delta_{ij} \end{cases}$$

Si ricerchino le soluzioni del *problema perturbato* (qui ancora l'autostato $|S_n\rangle$ si riferisce all'autovalore λ_n)

$$(H + \eta P)|S_n\rangle = \lambda_n|S_n\rangle \quad (3.2)$$

dove $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è un'osservabile, che siano sviluppabili in serie di potenze del parametro perturbativo reale $\eta : |\eta| \ll 1$ secondo lo schema

$$|S_n\rangle = |E_n\rangle + \eta|E_n^{(1)}\rangle + \eta^2|E_n^{(2)}\rangle + \dots \quad (3.3)$$

$$\lambda = E_n + \eta\lambda^{(1)} + \eta^{(2)}\lambda^{(2)} + \dots \quad (3.4)$$

in cui l'apice tra parentesi in $\alpha^{(i)}$ indica la potenza del parametro (detta *ordine perturbativo*) al quale il termine α si riferisce, a meno del caso particolare $|E_n^{(0)}\rangle \equiv |E_n\rangle$.

È chiaro che inserendo le espressioni (3.4) nel problema (3.2) e richiedendo l'eguaglianza dei termini che si riferiscono allo stesso ordine perturbativo si ottiene la catena illimitata di equazioni

Ordine	Equazione
0	$H E_n\rangle = E_n E_n\rangle$
1	$(H - E_n) E_n^{(1)}\rangle = (\lambda^{(1)} - P) E_n\rangle$
2	$(H - E_n) E_n^{(2)}\rangle = \lambda^{(2)} E_n\rangle + (\lambda^{(1)} - P) E_n^{(1)}\rangle$
.	.
.	.
k	$(H - E_n) E_n^{(k)}\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda^{(i)} E_n^{(k-i)}\rangle - P E_n^{(k-1)}\rangle$
.	.

La determinazione del termine $\lambda^{(i)}$ deve procedere in maniera ricorsiva ma in linea di principio non pone alcun problema, in quanto è sufficiente moltiplicare l'equazione all'ordine i per il bra $\langle E_n|$ e sfruttare le conseguenti relazioni di ortogonalità per ottenerne una scrittura esplicita: a titolo di esempio, per il caso $i = 2$ si ottiene

$$0 = (E_n - E_n)\langle E_n|E_n^{(2)}\rangle = \langle E_n|(H - E_n)|E_n^{(2)}\rangle = \lambda^{(2)}\langle E_n|E_n\rangle + \langle E_n|(\lambda^{(1)} - P)|E_n^{(1)}\rangle \quad (3.5)$$

da cui

$$\lambda^{(2)} = \frac{\langle E_n|P - \lambda^{(1)}|E_n^{(1)}\rangle}{\langle E_n|E_n\rangle} \quad (3.6)$$

Qualora gli autovalori di spettro discreto presentino degenerazione, la precedente discussione dev'essere completata ricordando che, assumendo un punto di vista matriciale, l'osservabile $H + \eta P$ che si sta cercando di diagonalizzare è una matrice a blocchi, ciascuno di dimensione pari al grado di degenerazione del livello energetico a cui si riferisce. Diagonalizzando separatamente i blocchi (come mostrato in [15]) si arriva ad una catena di equazioni secolari

$$\left| \langle E_j|P|E_k\rangle - \lambda^{(1)}\delta_{jk} \right| = 0 \quad (3.7)$$

dalle quali si ottengono le correzioni a ciascun livello energetico.

Un punto che si vuole sottolineare è che in generale uno schema perturbativo standard prevederebbe la risoluzione di integrali del tipo

$$\langle E_m|P|E_n\rangle = \int_D \psi_m^* P \psi_n \quad (3.8)$$

Siccome è noto che le soluzioni normalizzate della versione imperturbata del problema (2.32), ovvero dell'equazione di Helmholtz sul disco unitario, sono le funzioni di Fourier-Bessel (come mostrato nel capitolo 2.1.3)

$$\langle \mathbf{x}|E_{kl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_k(j_{kl}r)}{J_{k+1}(j_{kl})} (\cos m\theta \pm i \sin m\theta) \quad (3.9)$$

è chiaro che un simile approccio, oltreché a non mettere in evidenza il significato geometrico del parametro $\frac{1}{n}$, porterebbe sin dai primi ordini a delle difficoltà dovute all'integrazione di prodotti di funzioni di Bessel e alle somme sui loro zeri.

3.2 Una teoria perturbativa differente

Il seguente paragrafo si propone come obiettivo lo sviluppo di una teoria perturbativa di tipo conforme basata sul lavoro riportato in [17]; tuttavia è opportuno ricordare che questo è soltanto uno dei possibili approcci (si veda ad esempio [6] dove si effettua un rescaling delle autofunzioni del disco in una regione poligonale con la medesima superficie imponendo che le soluzioni massimizzino l'overlap): quando possibile, dunque, saranno confrontati i risultati ottenuti nel presente elaborato con quelli reperibili nelle referenze.

É evidente dall'ansatz diretto che una funzione d'onda test nella forma integrale

$$\psi_n(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma(\alpha) e^{i\epsilon \sin(e^{i\alpha} g(\bar{z}))} \quad (3.10)$$

soddisfa l'equazione (2.24); in questo modo si può demandare lo sviluppo perturbativo al kernel $\gamma(\alpha)$ e contemporaneamente implementare la condizione di Dirichlet richiedendo

$$0 = \psi_n(z(\theta), \bar{z}(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma(\alpha) e^{i\epsilon_n \sin(e^{i\alpha} g_n(e^{-i\theta}))} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \quad (3.11)$$

Una seconda ipotesi concerne la forma della funzione g_n : riprendendo le considerazioni del paragrafo precedente si assumerà

$$g_n(z) = C_n z (1 + \eta \phi(z)) \quad \phi(z) = {}_2F_1\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; z^n\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k z^{kn} \quad (3.12)$$

dove η è un parametro "perturbativo" poco distante dall'unità.

Per quanto concerne invece la scrittura del generico livello energetico, sempre seguendo [17], questo avrà la forma

$$\epsilon_n = \frac{1}{C_n} \left(1 - \eta \epsilon_n^{(1)} - \eta^2 \epsilon_n^{(2)} - \dots\right) \quad (3.13)$$

Infine la funzione $\gamma(\alpha)$ sarà espansa in serie di potenze di η nella maniera naturale

$$\gamma(\alpha) = \sum_i \eta^i \gamma^{(i)}(\alpha) \quad (3.14)$$

e verrà assunta un'analogha espressione per le sue componenti di Fourier γ_j in

$$\gamma(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j e^{ij\alpha} \quad (3.15)$$

Utilizzando tali presupposti si perviene all'equazione fondamentale

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\sum_i \eta^i \gamma^{(i)}(\alpha) \right) e^{\frac{\epsilon_0}{2} (1 - \sum_i \eta^i \epsilon_n^{(i)})} [e^{i(\alpha-\theta)} (1 + \eta \phi e^{-i\theta}) - e^{-i(\alpha-\theta)} (1 + \eta \phi e^{i\theta})] \quad (3.16)$$

dalla quale, richiedendo la validità della condizione (3.16) ad ogni ordine perturbativo e su tutta la circonferenza unitaria, si è formalmente in grado di ricavare le correzioni agli autovalori che alle autofunzioni. In particolare, anche a fronte delle difficoltà riscontrate nell'esplicitare le correzioni al secondo ordine, si è scelto di restringere la discussione al solo caso del ground state di un generico poligono regolare.

3.2.1 Ordine Zero

All'ordine Zero si deve avere

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma^{(0)} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} = \sum_k \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \gamma_k^{(0)} e^{ik\alpha} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} \quad (3.17)$$

$$= \sum_k \gamma_k^{(0)} e^{ik\theta} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} e^{ik(\alpha-\theta)} = \sum_k \gamma_k^{(0)} e^{ik\theta} J_{-k}(\epsilon_0) \quad (3.18)$$

$$= \sum_k \gamma_k^{(0)} e^{-ik\theta} J_k(\epsilon_0) \quad (3.19)$$

relazione soddisfatta $\forall \theta$ e per la prima volta sull'asse reale se

$$\gamma_k^{(0)} = \delta_{0,k} \quad \epsilon_0 = j_{0,1} \sim 2.4048 \dots \quad (3.20)$$

3.2.2 Primo Ordine

Per il primo ordine, ricordando che $\gamma^{(0)} = 1$, si ottiene

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\gamma^{(0)} + \eta \gamma^{(1)} \right) e^{\frac{\epsilon_0}{2} (1 - \eta \epsilon_n^{(1)}) [(1 + \eta \phi(e^{-i\theta})) e^{i(\alpha-\theta)} - c.c.]} \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\gamma^{(0)} + \eta \gamma^{(1)} \right) e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} [1 - \eta(\epsilon_0 \epsilon_n^{(1)} e^{i(\alpha-\theta)} + \quad (3.22)$$

$$- e^{i(\alpha-\theta)} \phi(e^{-i\theta})) - c.c.] \quad (3.23)$$

$$= \eta \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} (\gamma^{(1)} - i\epsilon_0 \epsilon_n^{(1)} \sin(\alpha-\theta) + \epsilon_0 (\phi(e^{-i\theta}) e^{i(\alpha-\theta)} - c.c.)) \right] \quad (3.24)$$

$$= \eta \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma^{(1)} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} + \epsilon_0 \epsilon_n^{(1)} J_1(\epsilon_0) - \frac{\epsilon_0}{2} J_1(\epsilon_0) (\phi(e^{i\theta}) + \phi(e^{-i\theta})) \right] \quad (3.25)$$

Integrando la precedente espressione su tutta la circonferenza unitaria si ricava

$$\epsilon_n^{(1)} = 0 \quad (3.26)$$

mentre la condizione di Dirichlet fornisce la forma esplicita delle componenti di Fourier del kernel

$$\gamma_{\pm jn}^{(1)} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{J_1(\epsilon_0)}{J_{\mp jn}(\epsilon_0)} \phi_j \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

Osservazione.

Come usuale in teoria perturbativa, l'equazione al primo ordine non fornisce la componente di Fourier $\gamma_0^{(1)}$: è sempre possibile effettuare una trasformazione del tipo $\psi_n \rightarrow e^{i\omega} \psi_n$ in modo che questa si annulli; questo ragionamento è indipendente dall'ordine, pertanto d'ora in poi si assumerà

$$\gamma_0^{(i)} = 0 \quad \forall i \quad (3.28)$$

3.2.3 Secondo Ordine

Al secondo ordine (ricordando che $\epsilon_n^{(1)} = 0$ e $\gamma^{(0)} = 1$) la teoria perturbativa fornisce l'espressione

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(1 + \eta\gamma^{(1)} + \eta^2\gamma^{(2)} \right) e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} \left\{ 1 + \eta \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\chi - \bar{\chi}) \right) + \right. \quad (3.29)$$

$$\left. + \eta^2 \left(\frac{\epsilon_0^2}{8} (\chi - \bar{\chi})^2 - i\epsilon_0 \epsilon_n^{(2)} \sin(\alpha - \theta) \right) \right\} \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

dove

$$\chi = \phi(e^{-i\theta}) e^{i(\alpha-\theta)} \quad (3.32)$$

Se si considerano a questo punto i soli termini relativi ad η^2 si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma^{(2)} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma^{(1)} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} \frac{\epsilon_0}{2} (\chi - \bar{\chi}) + \quad (3.33)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} \left(\frac{\epsilon_0^2}{8} (\chi - \bar{\chi})^2 - \epsilon_0 \epsilon_n^{(2)} \sin(\alpha - \theta) \right) \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \gamma^{(2)} e^{i\epsilon_0 \sin(\alpha-\theta)} - \epsilon_0 \epsilon_n^{(2)} J_{-1}(\epsilon_0) + \frac{\epsilon_0^2}{8} J_2(\epsilon_0) (\phi^2(e^{-i\theta}) + \phi^2(e^{i\theta})) + \quad (3.35)$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{2} \sum_j \gamma_{jn}^{(1)} e^{ijn\theta} \left[(-1)^{jn+1} \phi(e^{-i\theta}) J_{jn+1}(\epsilon_0) + (-1)^{jn-1} \phi(e^{i\theta}) J_{jn-1}(\epsilon_0) \right] \quad (3.36)$$

Ancora una volta è la condizione di annullamento $\forall \theta$ a fornire la correzione al secondo ordine per l'autovalore

$$\epsilon_n^{(2)} = -\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^2 \frac{J_{-(jn+1)}(\epsilon_0)}{J_{-jn}(\epsilon_0)} \quad (3.37)$$

e all'autofunzione

$$\gamma_{\pm(1+(j-1)\Theta(j-1))n}^{(2)} = \frac{J_1}{J_{\mp(1+(j-1)\Theta(j-1))n}}(\epsilon_0) \frac{\epsilon_0^2}{4} \sum_l \phi_l \phi_{l+1+(j-1)\Theta(j-1)}. \quad (3.38)$$

$$\cdot \left(\frac{J_{(j-1)\Theta(j-1)+(l+1)n+1}}{J_{(j-1)\Theta(j-1)+(l+1)n}}(\epsilon_0) + \frac{J_{ln+1}}{J_{ln}}(\epsilon_0) \right) + \Theta(j-1) \frac{J_1}{J_{\mp(1+(j-1)\Theta(j-1))n}}(\epsilon_0). \quad (3.39)$$

$$\cdot \left[\frac{\epsilon_0^2}{4} \sum_{l=1}^{j-1} \phi_{j-l} \phi_l \frac{J_{ln+1}}{J_{ln}}(\epsilon_0) - \frac{\epsilon_0}{4} (jn+1) \sum_{l=1}^{j-1} \phi_{j-l} \phi_l \right], \quad j > 1 \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

dove $\Theta = \Theta(x)$ è la funzione scalino di Heaviside.

3.2.4 Risultati numerici

Nella presente sezione si espongono i risultati ottenuti con un semplice programma scritto in Wolfram Mathematica; oltre a servire come confronto tra le previsioni del precedente modello perturbativo con i tre casi analiticamente risolubili, si effettua una comparazione con le stime numeriche ottenute in [17], dove a partire dallo stesso modello si procede con un differente approccio numerico, e in [6] nel quale, come già richiamato, viene adottato un differente punto di partenza. Verranno altresì presentati i risultati nel caso del ground state di alcuni sistemi poligonali con un numero più grande di lati non reperiti nelle referenze.

Numero di lati	[6]	[17]	ϵ_n	Casi Esatti
3	4.191192	4.189644	4.193835	4.188790
4	3.141727	3.141647	3.141960	3.141593
5	2.821416	2.820840	2.820891	-
6	2.676361	2.674948	2.674960	-
7	-	-	2.595211	-
8	-	2.546553	2.546550	-
9	-	-	2.514582	-
10	-	-	2.492393	-
15	-	-	2.442205	-
20	-	-	2.425483	-
25	-	-	2.417922	-
50	-	-	2.408040	-
100	-	-	2.405621	-
∞	-	-		2.404826

Come riscontrabile nella precedente tabella di riepilogo la stima per eccesso dei ground state $\forall n$ costituisce un primo segnale di affidabilità del modello perturbativo; un punto che si vuole evidenziare è che durante la fase di sviluppo del codice sono sopraggiunte delle difficoltà di carattere computazionale (probabilmente dovute alle serie di rapporti di funzioni di Bessel figuranti nella correzione al secondo ordine (3.37); pertanto a fronte del fatto che n possa essere assunto generico è risultato impossibile spingere le correzioni perturbative oltre il secondo ordine.

Ciononostante si osserva buona compatibilità con i casi triangolare e quadrato (almeno fino alla seconda cifra decimale) e allo stesso tempo con i ground states di alcuni dei poligoni a più alto numero di lati ottenuti con altri metodi in [17] (che sono stati ottenuti con un'espansione fino al terzo ordine).

Uno sviluppo possibile per il confronto tra le autofunzioni nel caso quadrato.

È noto che il ground state normalizzato del problema nel caso quadrato è rappresentato dalla funzione d'onda

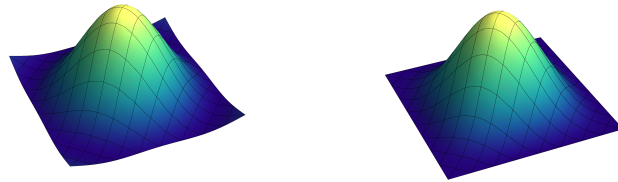
$$\psi_0^4(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \quad (3.42)$$

Per poter effettuare un confronto con le previsioni del modello precedentemente riportato è necessario elaborare leggermente la forma (3.10) per la funzione d'onda; in particolare moltiplicando e dividendo tale espressione per $e^{ik\theta}$ e ricordando la scrittura del kernel $\gamma(\alpha)$ nella base di Fourier (oltreché la rappresentazione integrale di una funzione di Bessel riportata in Appendice) si ottiene

$$\psi_n(r, \theta) = \sum_k (-1)^k \gamma_k e^{ik\theta} J_k(\epsilon_n r) \quad (3.43)$$

questa scrittura è talvolta nota come “Serie di Neumann di funzioni di Bessel” e costituisce certamente una semplificazione in termini numerici rispetto alla scrittura integrale. Tuttavia è chiaro che all'interno del presente contesto perturbativo il coefficiente γ_k riceve contributi ad ogni ordine in η , $\forall k$, situazione che crea delle difficoltà nel ricostruire la funzione d'onda. Una delle possibili modalità con cui effettuare un confronto costruttivo tra le autofunzioni è riscrivere la (3.43) in potenze del parametro perturbativo

$$\psi_4(r, \theta) = J_0(\epsilon_4 r) + \eta \sum_k (-1)^k \gamma_k^{(1)} e^{ik\theta} J_k(\epsilon_n r) + O(\eta^2) \quad (3.44)$$



(a) $\psi_4^{(0)} = J_0(\epsilon_4 r)$

(b) $\psi_4^{(ex)} \propto \cos(\pi x) + \cos(\pi y)$

Figura 3.1: Confronto tra l'ordine 0 (a simmetria cilindrica) e l'autofunzione esatta, che presenta le simmetrie del quadrato.

Uno sviluppo futuro è costituito dalla scrittura di un codice numerico che si occupi di gestire separatamente le correzioni all'autofunzione per ciascun ordine, studio che tuttavia esula dagli scopi della presente discussione.

Appendice A

Proprietà delle mappe conformi

Una grande quantità di problemi fisici planari (specialmente nell'ambito dell'Elettrostatica, nella Teoria della Conduzione del Calore e nella Meccanica dei Fluidi) è formulata in termini di un'equazione differenziale (spesso nella forma di Laplace o di Helmholtz) da risolversi assieme a ben precise condizioni al contorno relative al bordo dei domini, aventi una precisa interpretazione fisica: la teoria complessa delle mappe conformi risponde ad un'esigenza di semplificazione di tali richieste agendo come un particolare cambiamento di coordinate dalla variabile complessa z alla variabile complessa $w = g(z)$.

Sia infatti γ una curva nel piano di Gauss e $w = g(z)$ una funzione analitica almeno in un intorno del sostegno di γ ; supponiamo che $z = z(t)$ sia una parametrizzazione di γ e che $z_0 = z(t_0)$ sia un punto su di essa: è immediato osservare che il vettore tangente alla curva in z_0 , ovvero $\frac{dz(t)}{dt}|_{t_0}$ è correlato alla sua immagine tramite g nel piano w $\frac{dw(t)}{dt}|_{t_0}$ dalla "chain rule"

$$\frac{dw(t)}{dt}|_{t_0} = g'(z_0) \frac{dz(t)}{dt}|_{t_0} \quad (\text{A.1})$$

cioè si perviene alla fondamentale conclusione che tutti i vettori "spiccati" nello stesso punto vengono ruotati di $\arg(g'(z_0))$ (e dilatati di $|g'(z_0)|$, ma questa seconda proprietà è meno intrinseca della precedente in quanto dipende dalla parametrizzazione della curva).

Una conseguenza diretta di questo fatto è che, nei punti dove non risulti singolare, la mappa g preserva gli angoli, ovvero gode della proprietà di **conformalità**. Tra le mappe conformi (è chiaro che ogni funzione analitica identifica una mappa conforme) ricordiamo le trasformazioni di Moebius, il cui effetto sul piano complesso è riconducibile a rototraslazioni della sfera di Riemann mediante una semplice proiezione stereografica; tali applicazioni si scrivono nella forma

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Una discussione esauriente delle loro proprietà esula dagli scopi del presente elaborato (a questo proposito si veda [10] oppure [1]); in questa sede ci si limiterà a ricordare che esse giocano un ruolo fondamentale qualora

si voglia costruire una mappa conforme tra domini di forma arbitraria, poiché sono in grado di trasformare archi circolari in archi rettilinei (ovvero mappano circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate).

Un'altra tipologia di mappe conformi è costituita dalle trasformazioni di Schwarz-Christoffel, la cui forma generale può essere dedotta a partire da considerazioni di tipo euristico; tuttavia prima di arrivare a questo occorre assumere un punto di vista più sistematico e richiamare alcuni risultati di Analisi Complessa relativi a regioni semplicemente connesse del piano complesso, necessari per formulare il cosiddetto "Teorema della Mappa di Riemann".

Teorema A.0.1 (della mappa per semplicemente connessi).

Sia D una regione semplicemente connessa e sia $z_0 \in D$, con $D \subseteq \mathbb{C}$. Allora:

1. Se $D = \mathbb{C}$, $\exists \phi \mid \phi(D) = \Gamma_R$, ove $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R < \infty\}$; tuttavia $\exists! f : f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tale che $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) = 1$, cioè la funzione

$$f(z) = z - z_0$$

2. Se $D \neq \mathbb{C}$ allora $\exists! \rho > 0$ e $f \mid f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) = 1$ e tale che $f(D) = \Gamma_\rho$ nel senso sopra indicato.

Dimostrazione. Parte 1. Se $\phi(D) = \Gamma_\rho$, con $\rho < \infty$ allora ϕ è una funzione intera; inoltre è per costruzione limitata, dato che $|\phi(z)| < \rho \forall z \in \mathbb{C}$. Pertanto dal teorema di Liouville segue che ϕ è costante e dunque non può mappare \mathbb{C} in un disco. Sia ora f una mappa tale che $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$; f è ancora intera, pertanto ammette uno sviluppo in serie del tipo

$$f(z) = (z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Assumiamo per assurdo che ammetta una singolarità essenziale in $z = \infty$. Per il teorema di Casorati-Weierstrass $\forall n \in \mathbb{N}^+ \exists z_n : |z_n| > n \wedge |f(z_n)| < n^{-1}$. Segue che se $w_n \equiv f(z_n)$ la successione w_n tende a zero, mentre la successione $f^{-1}(z_n)$ è non limitata: questo è in contraddizione con la continuità di f^{-1} in $w = 0$ (ricordiamo che f^{-1} è analitica); quindi f non ammette singolarità in $z = \infty$, cioè è un **polinomio**, e dal Teorema Fondamentale dell'Algebra segue che deve essere di grado 1, da cui la tesi.

Parte 2. Mostriamo soltanto l'unicità del secondo caso. Siano f_1 e f_2 tali che $f_1(D) = \Gamma_{\rho_1} \wedge f_2(D) = \Gamma_{\rho_2}$. Sia f l'identità sul disco unitario, cioè

$$f(w) = \frac{1}{\rho_1} f_1 \circ f_2^{-1}(\rho_2 w)$$

Risulta evidente che $f(0)=0$ e $f'(0) = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, pertanto possiamo assumere senza perdere di generalità che $\rho_2 \geq \rho_1$, ossia $f'(0) \geq 1$. Il successivo lemma implica che f , con le suddette proprietà, sia l'applicazione identica. \square

Lemma A.0.1. (di Schwarz) Sia Γ_1 il disco unitario, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica in Γ_1 e tale che $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_1$, con $f(0) = 0$. Allora si ha:

1. $\forall w \in \Gamma_1 \quad |f(w)| \leq |w|$, cioè $|f'(0)| \leq 1$;
2. se $\exists w \in \Gamma_1 \setminus \{0\} : |f(w)| = |w|$ oppure $|f'(0)| = 1$ allora

$$\forall w \in \Gamma_1 \quad \exists c \in S^1 : f(w) = cw$$

Dimostrazione. Sia

$$g(w) = \frac{f(w)}{w} \quad |w| \in (0, 1)$$

g è chiaramente analitica e ammette una singolarità in $w = 0$. Siccome poi f è analitica nell'origine e $f(0) = 0$, si ha

$$\lim_{w \rightarrow 0} g(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w) - f(0)}{w - 0} = f'(0)$$

cioè la discontinuità è eliminabile e $g(0) \equiv f'(0)$ implica l'analiticità di g su tutto il disco unitario.

Nelle ipotesi del teorema è chiaro che $\exists \epsilon > 0 : |w| \leq 1 - \epsilon$. Si ha

$$\max_{|w| \leq 1 - \epsilon} |g(w)| < \frac{1}{1 - \epsilon}$$

dall'arbitrarietà di ϵ , $|g(w)| \leq 1$, la quale dimostra la parte 1 del teorema. Se per qualche $\epsilon \exists w \in \Gamma_1 ; |f(w)| = |w|$, $w \neq 0$ o $|f'(0)| = 1$, la relazione sopra mostrata diviene un'uguaglianza, e questo non è possibile a meno che $g(w) = c \quad \forall w \in E, \quad |c| = 1$

□

Per completare la dimostrazione della Parte 2 del teorema precedente è sufficiente osservare che il lemma di Schwarz implica $\rho_1 = \rho_2$, cioè si ricade nel caso b e siccome $|c| = 1 \wedge f'(0) = 1$, $c=1$ e infine $f_1 = f_2$.

A questo punto è possibile formulare due importanti corollari dei precedenti risultati, il secondo dei quali è noto in letteratura come "Teorema di Riemann":

Corollario A.0.1. Siano D ed E due regioni semplicemente connesse tali che $D \subset \mathbb{C}$ e $E \subset \mathbb{C}$. Sia $z_0 \in D, w_0 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\exists! f : f(D) = E$ tale che

$$f(z_0) = w_0 \quad \arg f'(z_0) = \alpha$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente è chiaro che $\exists \rho_1, \rho_2$ e due funzioni f_1, f_2 tutte unicamente determinate tali che $f_1(D) = \Gamma_{\rho_1}$ e $f_2(E) = \Gamma_{\rho_2}$, oltreché $f_1(z_0) = f_2(w_0) = 0$ e $f_1'(z_0) = f_2'(w_0) = 1$. La funzione

$$f(z) \equiv f_2^{-1} \left(e^{i\alpha} \frac{\rho_2}{\rho_1} f_1(z) \right)$$

rispetta esattamente le ipotesi del problema precedente.

□

Corollario A.0.2. (della Mappa di Riemann) Sia $C \in \mathbb{C}$ una regione semplicemente connessa e limitata. Allora $\exists! \rho \in \mathbb{R}^+ \wedge f : f(C^c) = \Gamma_\rho$.

Osservazione. Il precedente risultato è da riferirsi esclusivamente a regioni aperte del piano complesso e dunque non fornisce indicazioni sulla natura della mappa sui suoi bordi; fortunatamente esiste un suo affinamento (dovuta ad Osgood e a Caratheodory, si veda ad esempio [10]) che garantisce l'estendibilità della mappa conforme (peraltro univalente) alla frontiera della regione nel caso questa sia una curva chiusa e semplice, permettendo l'applicabilità di questa teoria ad un gran numero di problemi fisici al contorno.

Non è superfluo osservare che la trasformazione viene univocamente determinata qualora si faccia corrispondere ad una terna di punti appartenenti al bordo della regione di partenza, diciamo $z_i, i = 1, 2, 3$ una terna di punti sul bordo della regione di arrivo (che possiamo chiamare $\{w_1, w_2, w_3\}$) con ordinamento indotto dalla stessa numerazione. Infatti due mappe differenti dalla regione di partenza al disco unitario sarebbero collegate da una trasformazione di Moebius la quale, come è noto, ammette tre gradi di libertà complessi.

Teorema A.0.2. (Principio di Riflessione di Schwarz) Sia Γ un cerchio generalizzato e sia D una regione, $D \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che non intersechi Γ ma il cui bordo contenga un sottoarco non degenere Γ_0 di Γ . Sia f una mappa analitica in D e continua in $D \cup \Gamma_0$, e sia $f(\Gamma_0) = \Gamma^*$ ovviamente un cerchio generalizzato. Allora f può essere prolungata analiticamente in D' , la regione riflessa di D rispetto a Γ , e se z' è il simmetrico di z rispetto a Γ e w^* è il simmetrico di w rispetto a Γ^* , il prolungamento è definito da

$$f(z) = f(z')^*$$

(ossia f assume lo stesso valore in punti simmetrici rispetto a Γ e lo fa in maniera simmetrica rispetto a Γ^*)

Dimostrazione. Si veda [10]. □

Commento. Al di là di una dimostrazione di tipo costruttivo, il principio di riflessione di Schwarz è fondato sulla seguente osservazione: se la funzione $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica sul dominio D (che senza perdere di generalità possiamo collocare nel semipiano complesso positivo), la funzione $\phi \equiv \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$ ammette derivate parziali continue su tutto il dominio D^* , riflesso di D rispetto all'asse reale.

Ma $f(z)$ soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{A.4}$$

che sono evidentemente soddisfatte dalla mappa ϕ sul dominio D^* .

Infine è opportuno evidenziare che il precedente principio può essere esteso a riflessioni rispetto a segmenti ovunque collocati nel piano complesso (i quali sono sempre riconducibili al caso di riflessioni rispetto all'asse reale mediante opportuno rototraslazioni), purché la trasformazione conforme che si vuole applicare mappi segmenti nel piano z in segmenti nel piano w . Queste considerazioni rivestono un'importanza centrale per la teoria esposta nel prossimo paragrafo.

A.1 La trasformazione di Schwarz-Christoffel

La trasformazione di Schwarz-Christoffel nella sua versione originale si occupa di mappare conformemente il semipiano $Imz \geq 0$ nella regione racchiusa da un poligono: nella presente esposizione verrà assunto proprio questo punto di vista, beninteso che è sempre possibile comporla con una opportuna trasformazione di Moebius per mappare conformemente la regione poligonale di interesse nel disco unitario. È necessario ricordare che il Teorema della Mappa di Riemann garantisce l'esistenza e unicità di una siffatta trasformazione conforme (univalente): dunque in questa sezione, piuttosto che fornire una dimostrazione di tipo costruttivo, verrà proposta con argomenti euristici la più generale forma di tale mappa osservando che aderisce alle ipotesi di suddetto risultato.

L'idea che soggiace alla teoria di Schwarz-Christoffel sorge dall'ipotesi che sia possibile scrivere una mappa conforme f avente derivata (in senso complesso) del tipo

$$f' = \prod_i p_i \quad (\text{A.5})$$

per un'opportuna scelta delle funzioni p_i ; l'obiettivo è sfruttare le proprietà della funzione argomento, che ricordiamo essere la parte immaginaria del logaritmo complesso, per gestire i cambi di direzione durante la percorrenza del poligono. Per fissare le notazioni supporremo che D sia un dominio semplicemente connesso, limitato, avente bordo composto dall'unione da n segmenti (il poligono, appunto); sono ammessi tagli purché questi siano contati due volte (cioè come la sovrapposizione di due segmenti costituenti il bordo del poligono percorsi in verso opposto). Siano z_k , per $k = 0, \dots, n$ i **prevertici** della figura poligonale di arrivo (cioè $z_i = f^{-1}(w_i), \forall i$), collocati secondo l'ordinamento naturale sull'asse reale del piano z ; sia $\alpha_k \pi$ l'angolo interno relativo al k -esimo vertice: ovviamente $\alpha_k \in (0, 2]$; si definisce Γ_k il segmento congiungente w_{k-1} a w_k e si osservi che $(1 - \alpha_k)\pi$ è nient'altro che l'angolo di deviazione della traiettoria nel momento in cui si incontra il vertice w_k (si sta immaginando di percorrere il poligono nel verso indotto dalla numerazione precedentemente dichiarata); dal fatto che la somma delle deviazioni angolari dopo un giro completo del poligono (nel presente caso costituito di soli vertici a distanza finita dall'origine) deve eguagliare l'angolo giro si ottiene la relazione

$$\sum_{k=0}^n (1 - \alpha_k) \pi = 2\pi \quad \text{ossia} \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k = n - 1$$

Affermazione. La funzione f richiesta deve essere del tipo

$$f' = c \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)^{\alpha_k - 1} \quad (\text{A.6})$$

dove $c \in \mathbb{C}$. Infatti il polinomio $p_i = (z - z_i)^{\alpha_i - 1}$ mappa il semipiano $Im(z) \geq 0$ nella regione $\{arg(w) \in [0, (1 - \alpha_k)\pi]\}$, mantenendo costante l'argomento della sua derivata su tutto il segmento $z_{i-1} - z_i$ ed essendo prolungabile analiticamente a cavallo di questo grazie al principio di riflessione di Schwarz; la situazione si ripete allo stesso modo ad ogni prevertice, suggerendo la scrittura (A.6) la

quale, integrata opportunamente, fornisce la trasformazione fondamentale (o di Schwarz-Christoffel)

$$f(z) = A + C \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - \zeta_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta \quad (\text{A.7})$$

Trattazioni esaustive per la costruzione di (A.7) sono reperibili in [10], [8] e [1]; il discorso si concentrerà da questo momento in poi al caso in cui i domini da mappare conformemente l'uno nell'altro siano rispettivamente il disco unitario e la regione chiusa delimitata dal poligono regolare avente per vertici le n soluzioni complesse dell'equazione ciclotomica

$$w^n = 1 \quad (\text{A.8})$$

L'idea consiste nel fissare la trasformazione identificando una delle n regioni triangolari che costituiscono il poligono con il settore circolare

$$S = \{w \in \mathbb{C} : \arg(w) \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right) \cap |w| < 1\} \quad (\text{A.9})$$

preservando l'ordinamento; è immediato osservare che i tre vertici scelti costituiscono punti fissi della trasformazione.

A questo punto è ancora una volta il principio di riflessione ad assicurare il prolungamento continuo della funzione ricercata (si ricorda che il prolungamento continuo su sottoinsiemi densi di \mathbb{C} di funzioni analitiche implica il loro prolungamento analitico) effettuando successive riflessioni attraverso i raggi ad argomento costante la trasformazione può essere prolungata con continuità (ricordiamo che il prolungamento continuo di funzioni analitiche implica il prolungamento analitico) ad una trasformazione di tutto $|w| < 1$ nel poligono regolare. Si conclude osservando che per i suddetti motivi il termine di traslazione in (A.6) deve essere nullo mentre gli w_k non sono altro che le radici k -esime dell'unità, per i quali sussiste l'eguaglianza

$$\prod_{k=1}^n (w - w_k) = \prod_{k=1}^n \left(w - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right) = w^n - 1$$

in definitiva

$$g_n(w) = c_n \int_0^w (1 - w^n)^{-\frac{2}{n}} dw \quad (\text{A.10})$$

la quale, se c_n è la opportuna costante di normalizzazione

$$c_n = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$$

(qui $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ la funzione Gamma di Eulero) è nient'altro che la funzione (2.29).

A.1.1 Un esempio: il caso triangolare.

Come esempio applicativo della teoria richiamata nel paragrafo precedente può essere utile considerare il caso della trasformazione di Schwarz-Christoffel specializzata al caso del triangolo equilatero.

Si consideri il disco unitario Γ_1 e si supponga di essere interessati a mapparlo conformemente nel triangolo equilatero: per ottenere la trasformazione desiderata (qui il triangolo equilatero d'arrivo avrà come vertici le soluzioni dell'equazione ciclotomica $z^3 = 1$) occorre procedere in due passi. Per prima cosa si utilizza una trasformazione di Moebius che mandi il disco nel semipiano $Im(w) > 0$; semplici passaggi mostrano che una scelta possibile per la trasformazione desiderata è

$$w(z) = \sqrt{3} \frac{z+1}{i(z-1)} \quad (\text{A.11})$$

Come usuale in teoria delle trasformazioni conformi è utile valutare l'immagine, ad esempio, di alcune linee coordinate della regione di partenza: la scelta naturale è quella delle circonferenze e dei segmenti ad argomento costante (rispettivamente a passi di $\frac{1}{10}$ e $\frac{\pi}{12}$).

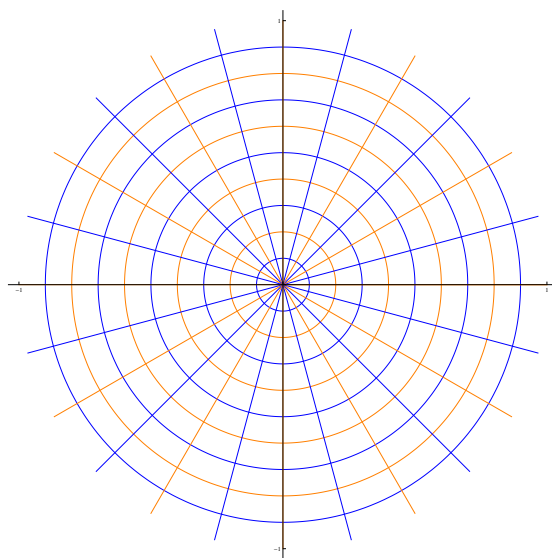


Figura A.1: Il piano complesso di partenza.

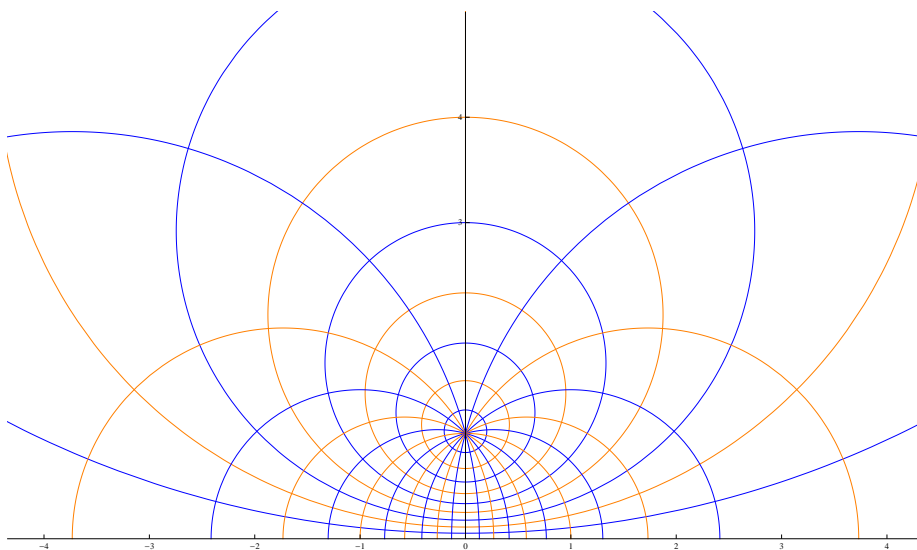


Figura A.2: Mapping del cerchio nel semipiano $w(z) \geq 0$; questa trasformazione risolve il problema dell'Elettrostatica di una carica puntiforme posta a distanza $\sqrt{3}$ da un conduttore piano infinitamente esteso, colorato in nero assieme all'asse di simmetria cilindrica (con colorazione ambigua è possibile distinguere le linee di campo in quanto terminano sull'asse reale, mentre le curve a potenziale costante sono chiuse).

Per comodità di visualizzazione è stata scelta la trasformazione in modo che l'origine sia mappata nel punto $\sqrt{3}i$. Il secondo passo, nello stesso spirito della deduzione della formula generale (A.10), consiste nello scegliere tre punti di questo semipiano appartenenti all'asse reale per poi mapparli nei vertici del triangolo equilatero mediante una trasformazione di Schwarz-Christoffel

$$\Omega(w) = A + B \int_0^w (1 - z^3)^{-\frac{2}{3}} dz \quad (\text{A.12})$$

Una possibile scelta è effettuata richiedendo che i punti $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = \infty$ vengano mappati nella terna

$$w_1 = \Omega(z_1) = -\frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad w_2 = \Omega(z_2) = 1, \quad w_3 = \Omega(z_3) = \frac{i - \sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.13})$$

Le costanti A e B contengono tutte le informazioni relative alle normalizzazioni e alle rototraslazioni (ovvero trasformazioni di Moebius) necessarie per collocare l'origine del piano z nell'origine del piano finale: in generale quest'ultimo punto non costituisce

Infine è semplice mostrare che l'ulteriore trasformazione richiesta, dopo qualche semplificazione algebrica, assume la forma

$$\Omega(w) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i} \frac{2\Gamma(\frac{5}{6})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{3})} w {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; w^2\right) \quad (\text{A.14})$$

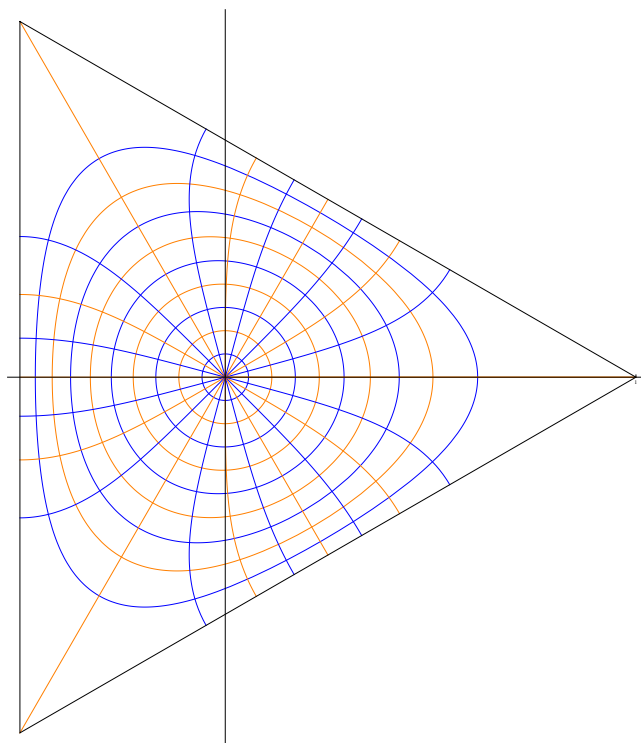


Figura A.3: Effetto della trasformazione completa

$$\Omega(w(z)) = -\frac{1}{2} - 3 \frac{z+1}{z-1} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -3 \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right)$$
 sul piano di partenza; si noti come la densità delle linee di campo sia minore in prossimità dei vertici mentre in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine (noto come **centro conforme**) si riduca ad una dilatazione. Problematiche di origine numerica relative all'immagine delle linee di campo mediante mappe conformi costituiscono il fenomeno del “**crowding**” (si veda a tal proposito [8], pt 2.6.)

Come si può notare la figura A.3 risolve formalmente il problema della determinazione delle linee di campo e delle superfici equipotenziali generate da una carica puntiforme collocata nel baricentro di un triangolo equilatero con bordo conduttore; non è superfluo ribadire che questo è esclusiva conseguenza della proprietà geometrica menzionata all'inizio della presente appendice e che è possibile utilizzare lo schema in due passi sopra adottato per risolvere il problema dell'Elettrostatica (il quale è riconducibile all'equazione di Laplace) per forme poligonali arbitrarie del dominio di arrivo.

Appendice B

Le funzioni di Bessel

La prima equazione differenziale la cui soluzione (a meno di una trasformazione di coordinate) sia riconducibile ad una funzione di Bessel¹ venne studiata da John Bernoulli nel 1694 nel contesto della teoria delle curve; aveva la forma

$$y'(x) = x^2 + y^2 \quad (\text{B.1})$$

Fu James Bernoulli a comunicare a Leibniz una soluzione di questa particolare equazione di Riccati come rapporto di serie di potenze (si ricordi che all'epoca era uso comune ricercare l'integrale primo in termini finiti); circa 40 anni più tardi D. Bernoulli, nel fornire il movimento per l'oscillazione di una catena pesante secondo quella che oggi è nota come "funzione cilindrica di ordine zero", pose l'accento sull'infinità dei suoi zeri.

Nel 1764 Eulero, dopo aver ripreso il lavoro di Bernoulli, risolse il problema della membrana circolare con il metodo delle serie di potenze (ottenendo sostanzialmente la soluzione (2.21)): la risoluzione del seguente problema differenziale trae origine proprio dal suo ragionamento che, oltre ad essere di validità generale, mette in evidenza alcune delle proprietà analitiche delle soluzioni.

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine ($\lambda = \text{cost}$)

$$rR'' + rR' + (r^2 - \lambda^2)R = 0 \quad (\text{B.2})$$

si è interessati ad una soluzione di (B.2) della forma

$$R(r) = r^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \quad (\text{B.3})$$

ove il prefattore r^m è stato scelto dalla teoria dei punti di singolarità fuchsiana. É chiaro che sostituendo nell'equazione di Bessel lo sviluppo (B.3) e richiedendo separatamente l'annullamento dei termini relativi ad ogni potenza di r (come usuale nel metodo di risoluzione delle equazioni differenziali per serie di potenze)

¹Per la trasformazione e altre note sulla storia di queste funzioni si veda [21]

si ottiene un sistema infinito di equazioni algebriche

$$\begin{cases} F_1(\lambda, m)c_0 = 0 \\ F_2(\lambda, m)c_1 + F_3(\lambda, m)c_0 = 0 \\ \dots \\ \sum F_j(\lambda, m)c_j = 0 \\ \dots \end{cases}$$

In questo sistema possiamo supporre che $c_0 \neq 0$, data l'arbitrarietà del grado m in (B.3); perciò, una volta determinato il primo coefficiente di tale sviluppo in serie, tutti gli altri sono noti mediante una qualche regola di ricorrenza.

Specializzando il calcolo al caso (B.2) si ottiene come prima equazione $F_1(\lambda, m) = m^2 - \lambda^2 = 0$, le cui due soluzioni $m_1 = \lambda$ e $m_2 = -\lambda$ sono i due possibili ingressi della regola di ricorrenza da determinare con le restanti relazioni (si noti l'invarianza dell'equazione differenziale sotto la sostituzione $\lambda \rightarrow -\lambda$): a questo punto è possibile costruire due soluzioni della forma

$$R_1(r) = r^\lambda \left(1 - \frac{r^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{r^4}{2 \cdot 2^2(2\lambda+2)(2\lambda+4)} + \dots \right) \quad R_2 = R_1|_{\lambda \rightarrow -\lambda} \quad (\text{B.4})$$

Osserviamo anzitutto che solo la prima delle due soluzioni è valida nel caso specifico di $\lambda \in \mathbb{Z}$ oppure semidispari (per via dei denominatori; nel caso di $\lambda \in \mathbb{N}$ la funzione (B.4) è nota in letteratura come *Funzione di Bessel di ordine λ* o *Funzione cilindrica di prima specie* e ammette la scrittura in serie

$$J_\lambda(r) = r^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\lambda)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \quad (\text{B.5})$$

Si noti anche che derivando la (B.4) segue la proprietà di simmetria

$$J_{-\lambda} = (-1)^\lambda J_\lambda(x), \quad \lambda \in \mathbb{N} \quad (\text{B.6})$$

Per completare la soluzione del problema (B.2) occorre fornire una soluzione linearmente indipendente da quella precedentemente trovata; a tale scopo si osserva che è possibile costruire una funzione differente da $J_\lambda(r)$ per un termine additivo del tipo

$$\sim R_1(r) \log r$$

(si veda [19], punto 25): questa funzione è nota come *funzione di Bessel cilindrica di seconda specie* ed è spesso indicata come $Y_\lambda(r)$, ma anche come funzione di Neumann $N_\lambda(r)$. La funzione di seconda specie è singolare nell'origine e dunque deve essere scartata nei problemi fisici della tipologia (2.9).

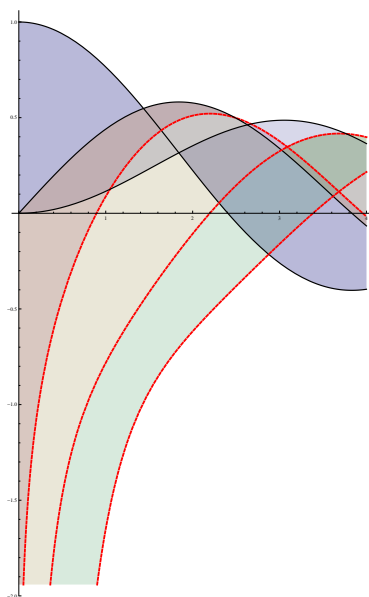


Figura B.1: Le prime tre funzioni di Bessel di ordine intero del primo tipo ($J_\lambda(r)$ - tratto nero) e del secondo tipo ($K_\lambda(r)$ o talvolta $Y_\lambda(r)$ - tratto rosso).

Vale la pena notare che è possibile utilizzare una diversa base dello spazio delle soluzioni prendendo le complessificazioni

$$H_\lambda^{(1)}(r) = J_\lambda(r) + iY_\lambda(r) \quad (\text{B.7})$$

$$H_\lambda^{(2)}(r) = J_\lambda(r) - iY_\lambda(r) \quad (\text{B.8})$$

Queste funzioni sono note come *funzioni di Hankel*.

Le funzioni di Bessel sono assai frequenti nei problemi di tipo astronomico (si pensi all'anomalia media nel problema di Keplero); anche Fourier incontrò queste funzioni nel suo celeberrimo studio sulla teoria della propagazione del calore: tuttavia risulta impossibile un'esposizione cronologica ed esauriente degli studi che portarono alla formulazione moderna, mentre è ragionevole adottare d'ora in poi uno stile più "analitico". L'approccio moderno, dovuto a Schlömilch e Bessel, consiste (per il primo) nel definire le funzioni o più propriamente i "coefficienti di Bessel" in termini di una funzione generatrice

$$e^{\frac{1}{2}z(t+t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \quad (\text{B.9})$$

dove a priori $z, t \in \mathbb{C}$. *En passant* osserviamo che il termine di sinistra è invariante per sostituzioni $t \rightarrow \frac{1}{t}$, mentre nel termine di destra la somma non cambia se $n \rightarrow -n$. Dall'unicità dello sviluppo in serie di Laurent si ritrova la relazione di simmetria (B.6).

Peraltro, differenziando la (B.9) rispetto a t e richiedendo l'eguaglianza dei coefficienti relativi al termine t^{n-1} si ottiene

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z}J_n \quad (\text{B.10})$$

mentre differenziandola rispetto a z

$$J_{n+1}(z) - J_{n-1}(z) = 2J'_n(z) \quad (\text{B.11})$$

Le due precedenti relazioni sono note come *formule di ricorrenza dei coefficienti di Bessel*; queste furono ritrovate indipendentemente da Bessel a partire dalla sua formulazione integrale

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - n\theta)} \quad (\text{B.12})$$

Del resto è facile mostrare che le due formulazioni sono equivalenti: moltiplicando la (B.9) per $t^{-(n+1)}$ e integrando su un cammino γ che includa l'origine con numero di avvolgimento +1 si ottiene

$$\int_\gamma dt \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{J_l(z)}{t^{l+n-1}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma dt t^{l-n-1} \quad (\text{B.13})$$

questa espressione è identicamente zero a meno che t^α non sia la derivata del logaritmo complesso ($l = n$), nel qual caso l'integrale vale $2\pi i$; abbiamo ottenuto

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dt e^{\frac{1}{2}z(t-t^{-1})} t^{-(n+1)} \quad (\text{B.14})$$

ovvero, scegliendo la curva γ come la circonferenza unitaria, la (B.12).

Bibliografia

- [1] M.J.Ablowitz, A.S.Fokas *Complex Variables - Introduction and Application*: 2003: Cambridge University Press.
- [2] M.Abramowitz, I.Stegun *Handbook of Mathematical Functions*: Dover, New York, 1965.
- [3] V. Amar, M.Pauri, A. Scotti *Schroedinger equation for convex plane polygons: a tiling method for the derivation of eigenvalues and eigenfunctions* *J. Math. Phys* **32** 2442, 1991.
- [4] M.Brack, R.K.Bhaduri *Semiclassical Physics*: Addison-Wesley, 1997.
- [5] S.M.Blinder, W.Li *Solution of the Schroedinger equation for a particle in an equilateral triangle* *J. Math. Phys* **26** 2784, 1985.
- [6] A.Ceulemans, L.F.Chibotaru, E.Lijnen *Radial Rescaling Approach for the eigenvalue problem of a Particle of an Arbitrarily Shaped Box*, *Phys. Rev. E* **77**, 2008.
- [7] R.Courant, D.Hilbert *Methods of Mathematical Physics: Volume I* 1953: Interscience Publishers, Inc.
- [8] T.A.Driscoll, L.N.Trefethen *Schwarz-Christoffel Mapping*: 2002: Cambridge University Press.
- [9] C.Gordon, D.Webb, S.Wolpert *Invent. Math.* **110**, 1 (1992).
- [10] P.Henrici *Applied and Computational Complex Analysis: Volume I* 1974: Wiley and Sons.
- [11] P.Henrici *Applied and Computational Complex Analysis: Volume III* 1974: Wiley and Sons.
- [12] M.Kac *Can one hear the shape of a drum?*: American Mathematics Monthly 73, 1966.
- [13] G.Lamé *Leçons sur la Théorie Analytique de la Chaleur* : Mallet-Bachelier, Paris, 1861.
- [14] G.Lamé *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'élasticité des Corps Solides Chaleur* : Gauthier-Villar, Paris, 1866.
- [15] L.D.Landau, E.M. Lifshits *Fisica Teorica: Volume III* : Editori Riuniti.

- [16] J.Milnor *Eigenvalues of the Laplace Operator on Certain Manifolds*: Princeton University
- [17] L.Molinari *On the Ground State of Regular Polygonal Biliards* *J.Phys.A* **30** 6517
- [18] L.E. Picasso *Lezioni di Meccanica Quantistica* Ed. ETS.
- [19] V.I.Smirnov *Corso di Matematica Superiore*: Volume II : Editori Riuniti.
- [20] K.Stewanson, R.T.Waetcher *On Hearing the Shape of a Drum: Further Results*, *Math.Proc.Camb.Phil.Soc* **69** 353, 1971.
- [21] G.N.Watson *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*: Second Edition, 1962, Cambridge University Press.
- [22] H.Weyl *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen*: 1911.